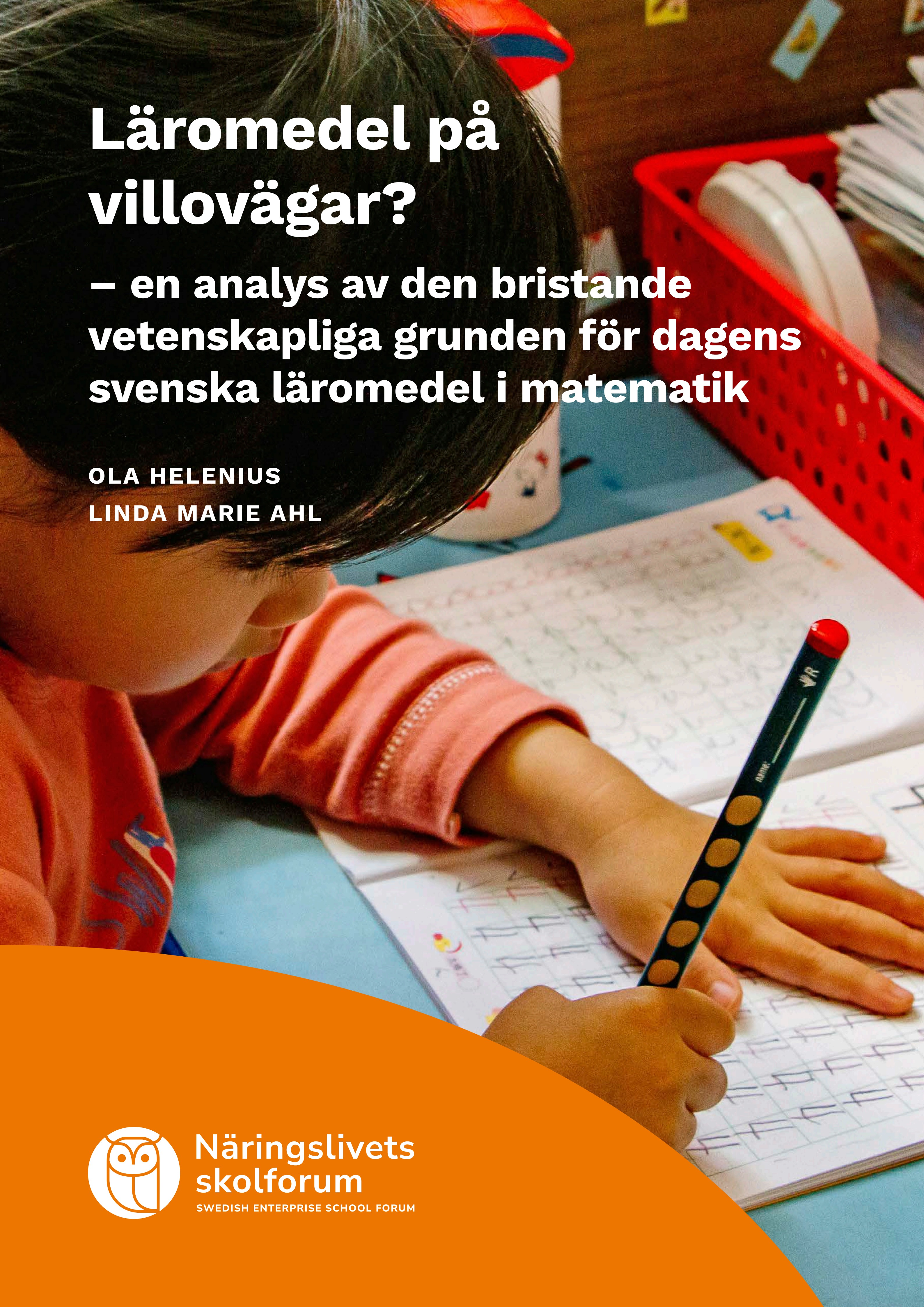


Läromedel på villovägar?

– en analys av den bristande vetenskapliga grunden för dagens svenska läromedel i matematik

OLA HELENIUS
LINDA MARIE AHL

Näringslivets skolforum
SWEDISH ENTERPRISE SCHOOL FORUM

Läromedel på villovägar?
Författare: Ola Helenius och Linda Marie Ahl
April 2024
Näringslivets skolforum, Stockholm
Foto omslag: Jason Sung, Unsplash

Innehållsförteckning

Näringslivets skolforum är ett initiativ från Svenskt Näringsliv för att stärka Sveriges kompetensförsörjning och förbättra kunskapsresultaten i svensk skola. Syftet är att erbjuda en arena för ökad probleminsikt, förutsättningslös dialog, internationell utblick och erfarenhetsutbyte.

Sammanfattning

Dagens skollag är tydlig: *Utbildningen ska vila på vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet* (SFS 2010:800, 1 kap. 5 §). Det gäller både till innehåll och form. I Sverige planeras och genomförs matematikutbildningen i väldigt hög utsträckning med ett läromedel som bas, där bokens innehåll ofta är det som undervisas på lektionerna. I den här rapporten analyserar vi därför vad några vanligt förekommande läromedel för grundskolan återspeglar, samt vad forskningen säger om innehållet, sekvenseringen och ämnesspråket i matematikundervisningen.

Vi presenterar främst exempel som berör *introduktionen av multiplikation och division*[1] samt *proportionella resonemang*[2] och *algebra*[3]. Läromedlen fungerar här som fallbeskrivningar av hur svenska läromedel generellt omhändertar kunskap från forskning.

Vår slutsats är nedslående. I inget av de fall vi har granskat finner vi att innehållet systematiskt vilar på vetenskaplig grund. Läroböckerna domineras av modeller som riskerar leda till begränsad förståelse av *multiplikation och division*, trots att det är väldokumenterat i forskning att det kan leda till problem i de senare åren av utbildningen. I de fall bättre modeller används görs detta inte systematiskt eller koherent. *Proportionella resonemang* behandlas fragmentariskt och utan en tydlig idé om *progression*[4], trots att proportionalitet är ett matematiskt fenomen som är närvarande i alla centrala innehållsområden i matematikundervisningen. *Bråkbegreppet*[5] beskrivs ensidigt som en del av en helhet eller del av antal. Men att använda bråk även som *operator*[6] eller skalningsfaktor – något som är helt centralt för till exempel proportionella resonemang – behandlas inte alls.

Vi ser också en varierande grad av avsaknad av adekvat *ämnesspråk*, från inget alls till felaktiga definitioner. Vad gäller området algebra tycker vi oss se en viss intention att anpassa sig till det sätt att se på algebra som i forskning kallas *tidig algebra*. Men när vi tittar närmare är denna intention långt ifrån genomförd på ett sätt som överensstämmer med den syn på algebra och tidig algebra som dominerar forskningen. Det strukturerade sättet att behandla tidig algebra klingar också av i senare årskurser, en tendens som startar redan i årskurs 2.

1 *Multiplikation* och *division* är två av de grundläggande *räknesätten* (operationerna) inom aritmetiken, tillsammans med *addition* och *subtraktion*.

2 *Proportionella resonemang* används för att söka en okänd kvantitet i en situation där de övriga kvantiteterna är givna i en linjärt multiplikativ relation (som en proportion a/b=c/d) och kan till exempel användas för att reda ut hur långt en bil kör om man känner till hastighet och restid.

3 *Algebra* är en gren inom matematiken som kan definieras som en generalisering och utökning av *aritmetiken* (den gren inom matematiken som handlar om rent räknande). Ett vanligt exempel är användningen av *ekvationer* (varför algebra ibland brukar kallas för bokstavsräkning, vilket dock är något missvisande).

4 Med *progression* menas succesiv fördjupning eller breddning av kunskaper i ett ämne.

5 Inom matematiken är ett bråk (fraktion) ett uttryck som beskriver förhållandet mellan två tal (som i exemplet $\frac{X}{Y}$ där det övre talet (här talet X) kallas för bråkets *täljare* och det nedre talet (Y) kallas för *nämnare*.

6 En *operator* är inom matematiken en symbol eller funktion som representerar en matematisk operation. Några exempel på binära aritmetiska operatorer är +, -, ·, / som står för att två element skall adderas, subtraheras, multipliceras respektive divideras.

Vi ser en ganska stor variation mellan läromedlen för de tidiga årskurserna där de mer nyskrivna böckerna glädjande nog behandlar introduktionen av multiplikation och den tidiga algebran på ett mer systematiskt sätt än äldre läromedel, men det krävs ändå stora förändringar i innehåll och sekvensering innan läromedlen kan anses vila på vetenskaplig grund. En anledning till bristerna kan vara att undervisningskultur och tradition styr innehållet. Vi menar vidare att det är en orimlig uppgift för läromedelsförfattare och förläggare att ha den överblick över forskning som skulle krävas för att skriva ett läromedel på vetenskaplig grund. Ansvaret för den överblicken behöver i stället läggas högre upp i den styrkedja som reglerar skolans matematikundervisning till exempel i läroplaner, kursplaner och kommentarmaterial.

Förslag

Med syfte att underlätta för skolans planering och genomförande av matematikundervisning vilande på vetenskaplig grund föreslår vi:

- Att det arbete som nu ska genomföras för att se över grundskolans kursplaner och kommentarmaterial i matematik grundas i matematikdidaktisk forskning.

- Att nya kursplaner i matematik föregås av ett kommentarmaterial som konkretiserar såväl innehåll som progression i kursplanen samt redovisar de vetenskapliga didaktiska överväganden som ligger till grund för dessa ställningstaganden.

- Att kommentarmaterialet skrivs för att fungera som ett stöd för både läromedelsförfattare och lärare. Det ska tydligt framgå vilket matematiskt innehåll som ska ingå i undervisningen och i vilken progressionstakt innehållet ska presenteras.

Inledning

Vi har problem med matematikundervisningen i Sverige. Efter nio år med matematikundervisning så gott som varje dag är det ändå 11,4 procent av eleverna som inte når ett godkänt betyg på det nationella provet för årskurs 9 läsåret 2022/2023. Samtidigt är det bara 9,2 procent, som når det högsta betyget. Det är alltså mer normalt att inte nå godkänt på det nationella provet än att uppnå riktigt goda resultat. Resultaten klustrar kring det precis godkända betyget E, som 32,7 procent når. Många lärare vittnar också om att de lågt ställda kraven för betyget E i årskurs 9 inte motsvarar tillräckliga förkunskaper för att klara matematikkurser på gymnasiet. Enligt PRIM-gruppens (Stockholms universitet) analys av resultat från nationella proven i matematik vårterminen 2023 (rapport 2023:4) var det nästan 40 procent av eleverna som inte klarade godkänt-nivån på det nationella provet på gymnasieskolans kurs 1a och 1b.

Detta trots att alla som läser ett ordinarie program på gymnasiet har blivit godkända i matematik i årskurs 9 och därför borde förväntas ha grundläggande färdigheter i till exempel taluppfattning, algebra, geometri, sannolikhet och statistik, samband och förändringar samt problemlösning.

För att förtydliga hur förkunskaperna kan brista, låt oss ge ett exempel: På det nationella provet i gymnasieskolan kurs 1a ingick under vårterminen 2023 den här uppgiften:

> **30.** I en saltvattenlösning med vikten 300 g är 12 % av vikten salt. Hur många gram vatten ska tillsättas för att lösningen istället ska innehålla 8 % salt?
>
> (0/0/2)

Figur 1. En uppgift från det nationella provet i gymnasiets kurs 1a, VT 2023 (frisläppt).

Av alla de tusentals elever (över 26 800 elever) som skrev provet var det endast 7 procent som kunde lösa denna uppgift. Kanske tycker även du som läser denna rapport att uppgiften verkar svår. Men tänk då på att de som gör provet i gymnasieskolans första årskurs har 10 år av skolmatematik bakom sig, med matematiklektioner nästan alla skoldagar. Uppgiften i fråga är också en typisk skoluppgift. För att lösa den här uppgiften behöver eleven:

- först kunna räkna ut hur många gram 12 hundradelar av 300 g är (det vill säga beräkna $12 \cdot 3 = 36$ g).
- Kunna förstå att dessa 36 g i den nya lösningen ska motsvara 8 % (36 g ~ 8 %).
- Därefter kunna skapa en enkel operator som skalar en kvantitet till en annan, det vill säga att om 8 procent salt i den nya lösningen är 36 g så ska totalvikten (100 %) för den nya lösningen vara 36 g/0,08 = 3 600/8 = 450 g (alternativt kan eleven ställa upp och lösa en enkel ekvation: $0{,}08 \cdot x = 36$).
- Därefter behöver eleven räkna ut skillnaden mellan den nya lösningen (450 g) och den gamla (beräkna 450 g – 300 g) för att förstå att svaret är att 150 gram vatten behöver tillsättas.

Uppgiften innehåller alltså egentligen inga komplicerade beräkningar. Ingenting behöver härledas och komplicerade algebraiska förenklingar lyser med sin frånvaro. Hur kan det då komma sig att bara 7 procent av eleverna i Kurs 1a kan lösa den här uppgiften? De har gått 9 år i grundskola och blivit godkända i ämnet matematik. De har dessutom gått en hel matematikkurs på gymnasiet.

93 procent av eleverna misslyckas alltså med detta enkla resonemang som vi – utifrån kursplanen i matematik och internationell forskning – bedömer vara av ren instrumentell karaktär någonstans mellan årskurs 6 och 8 (beroende på elevens individuella utvecklingskurva). När vi löste problemet analyserade vi en vardaglig situation, använde tal i bråk- och procentform och sambandet mellan proportionalitet och procent. Det stämmer väldigt väl överens med vad nu gällande kursplan (Lgr22) i matematik anger som centralt innehåll redan för årskurs 4–6[7]:

- Tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer.
- Tal i procentform och deras samband med tal i bråk- och decimalform.
- Proportionalitet samt hur proportionella samband uttrycks i bråk-, decimal- och procentform.
- Strategier för att lösa matematiska problem i elevnära situationer.

Hur kan så få gymnasieelever lösa problem som enligt kursplanen ska läras ut redan under mellanstadiet? Ett skäl kan vara att de formuleringar vi citerade ovan är så oprecisa att det är svårt att förstå vad som ska undervisas. Såsom kursplanerna är formulerade nu riskerar både lärare och läromedelsförfattare göra väldigt olika val av matematiskt innehåll och fortfarande kunna säga att punkterna ovan är behandlade. Enligt PRIM-gruppens statistik leder detta till att elever visserligen lär sig saker som ryms inom formuleringarna men uppenbarligen inte det som är viktigt om grundläggande multiplikativa strukturer.

7 I princip samma krav fanns redan i Lgr11, som var den kursplan som gällde när de elever som gjorde nationella provet i kurs 1a 2022 gick i grundskolan.

Vi kommer i den här rapporten argumentera för att en vagt formulerad kursplan tillsammans med svag forskningsförankring gör det svårt för såväl lärare som läromedelsförfattare att identifiera vad som är konceptuellt viktigt för att matematiken ska bli tillgänglig för eleverna.

Vi kommer också redovisa att skollagens krav på vetenskaplig grund inte uppfylls i läromedel för matematikundervisning.

Författarnas utgångspunkter

Innan vi går vidare vill vi deklarera några utgångspunkter för hur vi ser på läromedel och läromedlens roll i undervisningen. I Sverige (precis som i många andra länder) styr läromedel i stor utsträckning planeringen och genomförandet av matematikundervisningen i hela grundskolan. Enligt TIMSS 2011 rapporterade hela 89 procent av lärarna i årskurs 4 och 97 procent av lärarna i årskurs 8 att de använde matematikboken som bas för sin undervisning (Mullis m.fl., 2012). Det är möjligt att det ser lite annorlunda ut idag men det finns ingenting som tyder på att några stora förändringar i förhållningssättet till läromedel har skett efter 2011. Vi har inga skarpa data för hur det förhåller sig på gymnasiet men det är rimligt att anta att läromedlens ställning är stark även i gymnasiematematiken.

Medan somliga menar att vi borde utbilda lärare som inte är beroende av läromedel i så stor utsträckning så ser vi i läromedlen en potential för likvärdig undervisning där alla elever ges möjlighet att utvecklas. Givet lärarnas användning av läromedel så finns en utmärkt plattform för att implementera såväl forskningsresultat som beprövad erfarenhet om vad man behöver undervisa om samt mönstra ut uppfattningar om matematik som inte står sig över tid. Målet är i stället att ge alla elever möjlighet till en god progression i begreppskunskap och säkerhet i förmågan att hantera de matematiska situationer de ställs inför, både i utbildningssystemet och i sina kommande arbetsliv. Vi är alltså positiva till läromedel men samtidigt kritiska till dagens innehåll, struktur och (avsaknad av) progression. Vi ser en stor potential till förändring av matematikundervisningen via läromedel eftersom:

- En ändring av innehåll och sekvensering i läromedel som inte kräver att läraren ändrar sin undervisningspraktik har god potential att få ett stort genomslag i undervisningen och i elevernas lärande (Prytz m.fl., 2022a; Prytz, 2023b; Prytz m.fl., 2022b).
- Läromedelsförfattare, förlag och förläggare i allmänhet, enligt vår personliga erfarenhet, är mycket receptiva för förslag och förändringar och har ett genuint intresse för att stödja matematikundervisningen.
- Läromedelsförfattare, förlag och förläggare är mycket måna om att följa kursplanen och associerade dokument.

Lärarnas förtroende för läromedel tillsammans med läromedelsförfattarnas flexibilitet ger oss alltså en unik möjlighet att utveckla matematikundervisningen. Men vi tror att det behövs mycket tydligare beskrivningar av hur centrala begrepp i matematik ska undervisas för att kunna leverera de läromedel som stödjer en undervisning i samklang med matematikdidaktisk forskning.

Dessa utgångspunkter ska hållas i minnet när vi beskriver resultat från forskning om lärande och undervisning inom några skolmatematiska områden som är särskilt viktiga för progression i matematikkunskap. Vi kommer inte namnge några läromedelsserier som vi eller de vi refererar har studerat, eftersom vår kritik inte handlar om att peka ut enskilda läromedel. Vårt syfte är att belysa generella brister i läromedel som vi menar är en konsekvens av en otydlig kursplan i kombination med ett svagt kommentarmaterial.

Relationen mellan forskning och läromedel för några centrala matematiska områden

Vi har valt att undersöka tre områden som både har starka samband med varandra men också är forskningsmässigt olika. Det första området är *introduktionen av multiplikation och division* där det saknas riktigt starka belägg för exakt hur undervisningen borde läggas upp, men där det finns gott om beskrivningar av vilka negativa konsekvenser vissa undervisningsupplägg kan få.

Det andra området är *proportionella resonemang*, som på vissa sätt kan ses som en naturlig fortsättning av området multiplikation och division. I fallet proportionella resonemang präglas forskningen av att det finns tydliga rekommendationer för olika komponenter som bör finnas med i undervisningen.

Det sista området är *algebra*. Här präglas forskningen av insikten att algebra traditionellt uppfattats som svårt varför olika typer av algebra bör introduceras tidigare än vad som historiskt varit fallet, men med beskrivningar av vad sådan tidig algebra kan innebära.

Vi vill här särskilt betona att huvuddelen av den forskning vi kommer att referera till är flera decennier gammal. Det är alltså inte frågan om några nya och banbrytande, men kanske oprövade resultat, utan om forskningsresultat som varit välkända länge.

Introduktion av multiplikation och division

Det allra vanligaste sättet att introducera multiplikation är som upprepad addition av hela positiva tal. Samtidigt är det väldokumenterat i forskning att detta sätt ofta leder till den missuppfattning som kallad *heltalsbias*. Heltalsbias är en tendens att överanvända det kognitiva schema som eleverna använder för att räkna hela saker genom att använda de positiva heltalen (Ni & Zhou, 2005). Tankemodellen – som kan vara svårt att "undervisa bort" senare – riskerar att få flera negativa konsekvenser för elevernas senare inlärning, eftersom det finns två missuppfattningar om multiplikationens egenskaper som är direkt kopplade till heltalsbias:

1. Att förstå multiplikation som en additiv relation i stället för än en multiplikativ relation.

2. En övertygelse om att en produkt alltid kommer att vara större än var och en av produktens faktorer.

Att introducera multiplikation som upprepad addition och att bara multiplicera hela positiva tal under elevernas första år i skolan kan alltså resultera i djupa missuppfattningar. Kunskap som bildas och fungerar under vissa omständigheter tenderar att bilda en konsoliderad övertygelse om begreppets natur (Bachelard, 1938). Därför kan introduktion av multiplikation som upprepad addition bli så djupt rotade i studentens sinne att det blir svårt för eleverna att omvärdera sina bilder av vad multiplikation är (Fischbein m.fl., 1985).

Missuppfattningen att förstå multiplikation som en additiv relation i stället för en multiplikativ relation kan få vissa konsekvenser. Så länge multiplikationerna begränsas till hela tal kommer missuppfattningen inte att begränsa elevers resonemang (vilket troligen bidrar till att upprepad-additions-modellen är så populär i undervisningen). Men så snart elever introduceras för multiplikation med tal i bråkform eller tal med decimaler riskerar deras multiplikativa begreppsfält inte längre att vara tillräckligt för att lösa uppgifter. Produkter som 3 gånger 6 kan beräknas som tre additioner av talet sex ($3 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 = 18$). Produkter som ½ gånger 6 kan däremot inte beräknas som upprepade additioner av 6. Man kan visserligen addera ihop sex halvor (½ + ½ + ½+ ½ + ½ + ½ = 6 · ½) men det omvända, att addera ihop en halv sexa låter sig inte göras. Den kommutativa lagen[8], som skulle kunna vara användbar i detta sammanhang är svår att förklara enbart i termer av upprepade additioner.

Det andra problemet med heltalsbias är att det bidrar till att befästa den felaktiga uppfattningen att multiplikationer i regel gör något större. Detta underminerar elevernas möjligheter att tolka situationer med operationer som 0,22 · 1,20 där svaret är mindre än 1,20 (Bell m.fl., 1981). Det kan till exempel leda till att elever (som har en konceptualisering av multiplikation byggd på ett additivt resonemang med hela tal) som rent tekniskt kan utföra beräkningen av ett tal mindre än 1 multiplicerat med ett annat tal i slutändan kan vara ovilliga att ställa upp ett sådant uttryck (Greer, 1987).

Motsvarande problem som vi har beskrivit för multiplikation finns också för *division*. Division introduceras ofta via *likadelning*, det vill säga att låta divisionen 12/3 vara ett uttryck för hur många saker varje person får om 3 personer ska dela på 12 saker. Även här förekommer en heltalsbias, nämligen att svaret vid en division förefaller att bli mindre än det som divideras. På samma sätt som för multiplikation kan ett ensidigt dividerande av täljare större än nämnarna leda till att elever blir tveksamma att använda division om de tror/anar att svaret ska bli större än täljaren (Greer, 1987). I exemplet som inleder vår rapport kan till exempel eleverna känna tveksamhet för att ställa upp beräkningen 36/0,08, för att de anar att de svar de söker ska vara större än 36.

Ett alternativt sätt att introducera division är som lika grupper, det vill säga att 12/3 får betyda: *Om det ska vara tre saker i varje låda och vi har 12 saker, hur många lådor behövs?* Detta kallas *innehållsdivision*. Innehållsdivisionen har flera förtjänster, som att det direkt blir möjligt att ge mening åt divisioner som 12 / (½) (som till exempel: om du har 12 dl vätska och häller upp ½ dl per glas, hur många glas räcker vätskan då till?). Även om innehållsdivisionen introduceras för eleverna, kommer dock heltalsbias att uppkomma om man inte tidigt vänjer sig vid att dividera med tal mindre än 1 (Greer, 1994; Semadeni, 1984).

Ett ytterligare oöverkomligt problem med att låta meningen hos multiplikation bottna i addition, är att vi bara kan addera saker av samma slag.

8 Ordet kommutativ kommer av ett latinskt ord som betyder byta ut och den *kommutativa lagen* är den räknelag som beskriver att termer i addition eller faktorer i multiplikation kan byta plats utan att summan eller produkten påverkas (som i $5 + 7 = 7 + 5$ eller $4 \cdot 8 = 8 \cdot 4$).

Vi kan till exempel inte addera 2h + 500 kr/h. Multiplikation (och division) karakteriseras i praktiken ofta av att de ingående faktorerna har olika enheter, som i beräkningen 2h · 500 kr/h = 1 000 kr. Men med upprepad addition som modell måste denna beräkning betraktas utan tidsenhet som 2 · 500 kr = 1 000 kr. En vanlig invändning är då att beräkningen inte får skrivas som 500 · 2 eftersom "man väl inte vill jobba 500 timmar för 2 kronor per timme". Modellen upprepad additions leder alltså till att vi inte kan hantera olika enheter i samma operation vilket i sin tur leder till att den grundläggande egenskapen *kommutativitet* inte längre gäller, vilket skapar en missuppfattning hos eleverna. (Schwartz m.fl., 1988). Den kommutativa lagen säger nämligen att det inte spelar någon roll i vilken ordning vi multiplicerar faktorerna. I själva verket är ju 2 h · 500 kr/h = 500 kr/h · 2 h inga problem när man tar med enheterna i beräkningen.

De problem vi har beskrivit ovan har allt med synen på multiplikation som upprepad addition att göra och att multiplikativa operationer bara introduceras med heltal. Men ett likartat problem är hur bråk introduceras. Forskning är överens om att den utbredda användningen av så kallade del-helhetsmodeller för att introducera bråk har stora negativa effekter för hur elever ska kunna förstå bråk multiplikativt (Behr m.fl., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Olanoff m.fl., 2014) vilket i förlängningen skapar svårigheter att både förstå och kunna genomföra multiplikation och division av bråk (Harel m.fl., 1994) – problem som sedan ofta kvarstår även i vuxen ålder (Son & Lee, 2016; Tirosh, 2000).

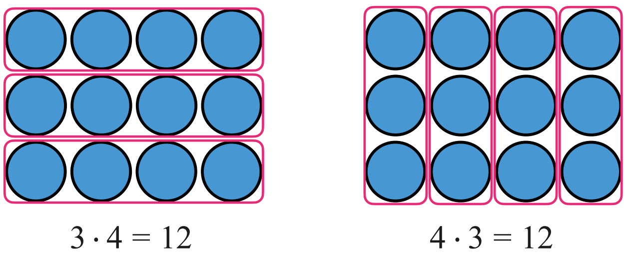
Vi vet alltså att det som verkar fungerar bra i undervisningen om multiplikation i de tidiga åren lägger grund för missuppfattningar som är svåra att få bukt med när multiplikation längre fram i skolgången ska utökas till rationella och reella tal. Det är ett starkt argument för att hitta alternativa sätt att introducera multiplikation och därigenom undvika heltalsbias. Alternativa modeller för att introducera multiplikation i tidiga år är då till exempel *lika grupper* (Park & Nunes, 2001) *rutnätsmodellen*, *areamodellen*, *koordinerade mått på tallinjen* och *verbala uttryck* (Izsák m.fl., 2021; Säfström m.fl., 2019).

Hur introduceras multiplikation och division i svenska matematikläromedel?

För att undersöka hur multiplikation och division presenteras i svensk skola har vi studerat tre vanligt förekommande läroboksserier för lågstadiet. För två av dessa har vi även studerat deras respektive serie för mellanstadiet.

Läroboksserie A

I *Läroboksserie A* introduceras multiplikation som just upprepad addition. Däremot förekommer en särskild slags uppgiftstyp där man beskriver multiplikation med hjälp av rektangelmodeller och de associerade kommutativa versionerna av multiplikation (till exempel 3 · 4 = 12 respektive 4 · 3 = 12). Det beskrivs dock aldrig hur rektangelmodellen hänger ihop med upprepad addition och rektangelmodellen används inte heller för att till exempel visa *distributiva lagen*[9] (vilket den är lämplig för). I serien förekommer dock rektangelmodellerna varje gång multiplikation behandlas i alla böckerna för lågstadiet för att visa multiplikationens kommutativitet.



Figur 2. En generisk illustration av användningen av rektanglar för att illustrera multiplikationens kommutativitet i läroboksserie A.

9 Distributiva lagen beskriver hur vi löser uttryck som a · (b + c). Den distributiva lagen kallas ibland för att multiplicera in i parentes.

Division introduceras i årskurs 2 som likadelning och likagruppering, det vill säga både som delningsdivision och innehållsdivision. Division kopplas nästan omedelbart till multiplikation genom aritmetiska uttryck som 5 · 2 = 10 respektive 10/2 = 5 (intressant nog utan att nämna att det alltid finns två divisioner associerade till en viss multiplikation, det vill säga även 10/5 = 2 för exemplet ovan).

Så här långt finns det alltså ingen beskrivning av varför division och multiplikation hör ihop utan bara en beskrivning av att så är fallet. På våren i årskurs 2 används rektangelbilder som delas upp i rader eller kolumner för att hantera division, med en första påminnelse om att multiplikation och division hör ihop. Det ges dock inte heller här någon formell beskrivning av hur dessa rektangelbilder hänger ihop med multiplikation och intressant nog används inte samma typ av framställning som rektangelbilderna i uppgifterna som ska illustrera multiplikationens kommutativitet. Faktorisering beskrivs med hjälp av triangelbilder men används aldrig till något.

Bråk introduceras som del av helhet med schematiska del-helhetsbilder, samt som del av antal. För del av antal beskrivs det som att ta *½ av* ett visst antal, dock utan att kopplingen till multiplikation nämns. Det ges överlag ingen indikation om bråkuttryckens multiplikativa betydelse (som att ¾ uttrycker ett förhållande mellan kvantiteterna 4 och 3). Bråkuttryck kopplas inte heller till multiplikation eller division.

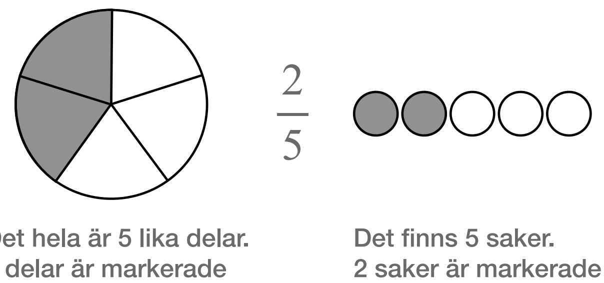
Mellanstadieserien är inte alls lika rik på multiplikativ struktur. På något ställe förekommer rektangelbilder för att illustrera sambandet mellan multiplikation och division. Prioriteringsregler nämns utan någon koppling till distributiva lagen. Distributiva lagen används inte heller för att motivera räknemetoder för multiplikation och division. Division med rest beskrivs med hjälp av rektangelmodeller medan division med tal mindre än 1 inte förekommer alls i A-serien, vare sig på låg- eller mellanstadiet.

Läromedelsserie B

I vårt andra exempel – här kallat *Läromedelsserie B* – introduceras multiplikation som upprepad addition utan att nämna att multiplikation också handlar om att hantera lika grupper. Division introduceras med hjälp av likadelning (det vill säga delningsdivision) och följs upp med likagruppering (det vill säga innehållsdivision som i praktiken beskrivs som upprepad subtraktion). Till exempel om 12 ska delas med 3, så drar man bort 3 tills inget återstår och räknar hur många gånger det kunde göras. I praktiken introduceras multiplikation och division flera gånger i olika årskurser eftersom man går igenom multiplikationstabellvis. Det beskrivs att multiplikation och division hör ihop, genom att referera till att man kan kontrollera division med multiplikation, det vill säga 12/4 = 3 och 3 · 4 = 12. Eftersom man inte systematiskt beskriver multiplikation som en operation på lika grupper så förekommer dock aldrig någon förklaring till varför multiplikation och division uppfyller detta samband. Distributiva lagen beskrivs inte. Prioritering (det vill säga att i uttrycket 3 · 4 + 5 ska man först multiplicera och sedan addera) introduceras i årskurs 2. Först i årskurs 5 beskrivs att multiplikation är kommutativ, dock utan närmare förklaring. Även faktorisering presenteras först i årskurs 5, även det utan förklaring. Intressant nog presenteras sedan idén om att division kan gå jämt ut eller ej med rektangelfigurer där det blir ett antal lösa bitar över (det vill säga en rest) när divisionen inte går jämt ut. Detta kopplas dock inte till faktorisering.

Från årskurs 4 finns i bokserie B ett tydligt fokus på multiplikation via talsorter (det vill säga med hjälp av positionssystemet) men det finns egentligen ingen förklaring till varför multiplikationen fungerar på detta sätt (eftersom man inte har introducerat distributiva lagen). Även division hanteras ofta via talsortsräkning men inte heller för detta finns någon egentlig förklaring.

Bråk presenteras som lika delar av en geometrisk figur, oftast cirklar och lite senare som del av antal. Precis som i serie A finns ingen beskrivning av att bråk är ett i grunden multiplikativt begrepp. Först i årskurs 5 presenteras bråk på tallinjen, men utan förklaring av hur det fungerar. Multiplikation med bråk behandlas endast på formen heltal · bråk och då som upprepad addition (som i 4 · ½ = ½ + ½ + ½ + ½). Detta motiveras med hjälp av bråkcirklar som upprepad addition av delar av en figur och kopplas med representationen till upprepad addition av bråkuttryck.

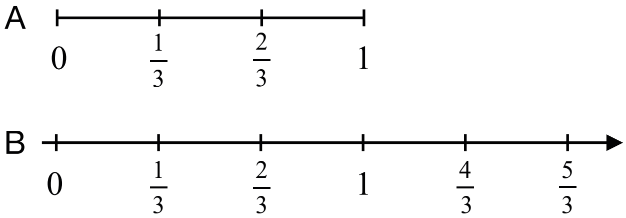


Figur 3. En generisk illustration av bråk som del av helhet och del av antal som det används i läromedelsserie B och även i de andra granskade läromedlen.

Även multiplikation av decimaluttryck görs endast på formen heltal · decimaluttryck via upprepad addition. Division av bråk med ett heltal, till exempel (1/2) / 4 beskrivs som att man ska multiplicera nämnaren med 4, men det förklaras inte varför. Allmän bråkdivision (eller multiplikation) behandlas inte alls före högstadiet. Division av ett heltal med ett decimaluttryck, (t ex 5/0,1) förklaras som en flytt av decimaltecknet utan begreppslig beskrivning.

Läromedelsserie C

Läromedelsserie C börjar med att introducera bråk på hösten i årskurs 2, före multiplikation och division. Det görs först med hjälp av *del-helhetsbilder* och sedan som *del av antal*. När del av antal behandlas kopplas även *hälften av* till symbolen ½, dock utan koppling till operationen multiplikation. Även addition av bråk presenteras med del-helhetsbilder och här förekommer också bråk större än 1. Intressant nog återkommer sedan inte bråk förrän på våren i årskurs 3, nu kompletterat med *tallinjemodellen*, dock utan att bråk över 1 finns med. I de praktiska uppgifterna dominerar fortfarande del av helhet.



Figur 4. Tallinje A är en generisk illustration av den typ som används i läromedelsserie C som inte fortsätter förbil 1 och inte kan beskriva bråk över 1. Tallinje B är en tallinje där även bråk över 1 kan illustreras.

Multiplikation introduceras i läromedelsserie C som upprepad addition direkt kompletterat med rektangelformer, som även används för att visa kommutativitet. Efter denna introduktion används upprepad addition inte explicit. Division beskrivs först som likadelning med stöd av rektangelbilder som även används för att visa hur multiplikation och division hör ihop. Innehållsdivision introduceras med hjälp av rektangelbilder och frågan hur *många gånger ryms täljaren i nämnaren*. Divisionsuttryck kopplas till öppna multiplikationutsagor, som 15/3 =_och 3 · _= 15. En något udda företeelse genom hela behandlingen av multiplikation och division i Läromedelsserie C är att när en viss multiplikation (exempelvis 5 · 3 = 15) kopplas till en division så är det bara till den ena divisionen, till exempel 15/5 = 3. Det beror på att det görs en outtalad skillnad på de två multiplikationerna $3 \cdot 5$ och $5 \cdot 3$ som kan vara en slags kvarleva från tidigare beskrivning av multiplikation som upprepad addition som man hade kunnat börja arbeta bort genom att även ha med divisionen 15/3 = 5).

När multiplikation återkommer i årskurs 3 kompletteras rektangelbilder med lika grupper (tärningsmönster) samt hopp på tallinjen. Genom hela serien behandlas en viss tabell samtidigt i multiplikation- och divisionsmening. Kopplingen mellan multiplikation och division hålls här alltså ihop. Olika divisioner beskrivs dock på olika sätt. Division med 3 beskrivs t ex som en additiv uppdelning i 3 grupper medan division med 10 beskrivs som *hur många gånger ryms 10 i täljaren?*

Sammantaget om läromedlen

Sammanfattningsvis kan man säga att kvaliteten i relation till den forskning som vi redovisat varierar mycket. Bokserie C använder klart fler av den typ av alternativa modeller för multiplikation som har stöd i forskning (som tallinjen och rektangelmodeller). Den använder även upprepad addition klart mindre, med det finns fortfarande underliggande rester av ett additivt tänkande som visar sig i hur de två olika idéerna om division i praktiken knyts till olika multiplikationer. Även bråk beskrivs på ett något rikare sätt än i bokserie A och B men kopplas inte alls till multiplikativa idéer. Vi har dock inte undersökt motsvarigheten för bokserie C för mellanstadiet.

Bokserie B förlitar sig starkt på upprepad addition och har över lag en tydlig inriktning på talsortsräkning. De tankemodeller som introduceras och används för multiplikation, bråk och division ger ett svagt stöd för en sammanhängande begreppslig utveckling av multiplikativt tänkande.

Bokserie A ligger i någon mening mellan C och B. Det finns fler alternativa modeller som gör att man kan förstå multiplikationens kommutativitet och sambandet mellan multiplikation och division, men de används mindre systematiskt än i C. Mellanstadieböckerna i serie A är inte alls lika rika på multiplikativ struktur som lågstadieböckerna. En intressant anmärkning om bokserien A är att böckerna för lågstadiet är relativt nyskrivna medan böckerna för mellanstadier har funnits med länge. Det märks att författarna till A för årskurs 1–3 har tagit till sig av en modern diskussion om multiplikation i betydligt högre grad än författarna till mellanstadieböckerna.

Även bokserie C är relativt nyskriven. Detta visar att det alltså går att producera och sälja böcker som i högre grad hanterar de problem med det multiplikativa begreppsfältet som har pekats ut i forskning och att det troligen inte finns några hinder för att ta ytterligare steg i den riktningen.

Proportionella resonemang

Forskning visar att just förmågan att hantera multiplikativa strukturer och proportionella resonemang med flyt är helt avgörande för om elever lär sig den matematik som vi arbetar med i grundskolan (Vergnaud, 1982, 1983, 1988). Med proportionalitet menar vi en situation där två kvantiteter förhåller sig *linjärt* till varandra, vilket gör att du kan finna det svar som söks i uppgiften genom att multiplicera eller dividera. Problem som kan lösas med hjälp av proportionella resonemang utgör majoriteten av alla problem elever förväntas hantera med flyt från årskurs 4 och upp till Matematik 1 på gymnasiet. Även i fysiken, kemin och biologin är proportionella resonemang helt centrala.

Typiska problem som kan lösas med proportionella resonemang är problem där två värden är givna och det tredje saknas och ska räknas ut och där det finns en multiplikativ relation mellan par av värden (Vergnaud, 1983). Ett enkelt exempel är *3 kg apelsiner kostar 36 kronor, vad kostar 5 kilo apelsiner?* Problem av "saknat värde"-karaktär kryllar det av i matematikläromedel världen över. Proportionella resonemang används även för att lösa problem där eleven ska jämföra vilket förhållande som är större eller mindre än det andra.

Det är väl känt att elever över hela världen har svårt att utveckla förmågan att resonera proportionellt om bråk, procent, förhållanden, skalning, likformighet, trigonometri och förändringshastigheter (Behr m.fl., 1992). Proportionalitet startar blygsamt i skolmatematiken med fördubbling, halvering och skalning av enkla bråk. Över tid, och genom årskurserna, tar sedan de proportionella resonemangen successivt mer och mer plats.

Eftersom en proportion definieras som likhet av två förhållanden (a/b = c/d), är flyt i hanteringen av bråkrepresentationen helt central för elevernas progression i förmågan att resonera proportionellt (Vergnaud, 2009).

Det är bland annat här som vi får problem med heltalsbias. Detta då elever har svårt att uppfatta heltal som nedbrytbara enheter. Eleverna uppfattar helt enkelt inte ett bråk som ett tal utan snarare som två tal skriva på en form som vanligtvis används när de ska dividera men som nu i stället framställs som delar av cirkelrepresentationer (del-helhets förhållande). Det är helt andra kunskaper om bråk som operator (skalfaktor), del-del förhållande och sammansatta enheter (som hastighet och densitet) som behöver läras ut för att eleverna ska ges möjlighet att bli säkra på proportionella resonemang.

Hur elever kan lära sig att behärska proportionella resonemang är väl beforskat (ex. Behr m.fl., 1992; Dooren m.fl., 2010; Shield & Dole, 2013; Vergnaud, 1983) vilket gör att man kan identifiera vissa nyckelaspekter för vad som behöver undervisas för att elever ska utveckla förmågan att utföra proportionella resonemang med flyt (Ahl, 2019).

Elever måste kunna särskilja additivt från multiplikativt resonemang och kunna känna igen när det finns en proportionell relation

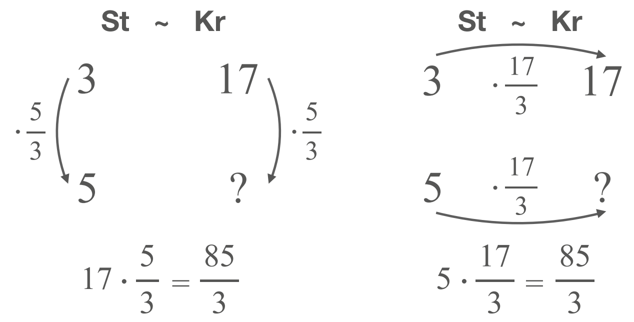
Att skilja additiva från multiplikativa relationer är en stor stötesten för elever (Van Dooren m.fl., 2005). Elever behöver undervisas i att känna igen när en proportionell situation existerar och när en jämförelse är multiplikativ (Shield & Dole, 2013). Det har föga förvånande visat sig att när elever arbetar med additiva resonemang så tenderar de att använda dem utan eftertanke, även på uppgifter som kräver multiplikativa resonemang (Fernández m.fl., 2012).

Även det omvända gäller. När undervisningen skiftar fokus till multiplikativa resonemang så används de även på problem som löses med additiva resonemang. När eleverna väl har introducerats för multiplikativa strategier för att lösa multiplikativa situationer tenderar de att överanvända detta tillvägagångssätt på allt som liknar en proportionell situation (Van Dooren m.fl., 2005).

Eleverna behöver därför möjligheter att träna på att analysera om situationer är additiva eller multiplikativa (Shield & Dole, 2013). Problemen de arbetar med behöver representera båda resonemangen även i den senare delen av grundskolan.

Det räcker förstås inte att känna igen en proportionell situation. Eleverna behöver kunna använda både multiplikation och den inversa operationen division för att finna den okända kvantiteten (Shield & Dole, 2013). Den matematiska strukturen gör att samma proportionella resonemang kan tillämpas på alla proportionella situationer (Vergnaud, 1983). Låt oss ge ett exempel: Om vi vet att 1 sak kostar 15 kr så kostar 5 saker 5·15 kr = 75 kr. Operatorn (det man multiplicerar med för att transformera ett tal till ett annat) här är 5. Men vad är operatorn om vi ska köpa 5 kilo när vi vet att 3 kilo kostar 17 kr?

Nu är skalningoperatorn inte ett heltal eftersom både 3 och 17 är primtal. Eleverna behöver därför öva på att de alltid kan skapa en operator som skalar ett tal eller uttryck (vi kan kalla det *a*) till ett annat tal eller uttryck (vi kan kalla det *b*) genom att multiplicera *a* med *b*/*a* (*a* · *b*/*a* = *b*). Så priset för 5 saker kan alltså beräknas som 5·17/3 eller 17·5/3. Det går bra att skala både *inom enheter* eller *mellan enheter.* Resultatet blir detsamma på grund av det proportionella sambandet mellan enheterna (linjäritetsargumentet).



Figur 5. Till vänster skalningsoperator inom enheter. Till höger skalningsoperator mellan enheterna.

Eftersom bråkformen vanligen inte används när vi talar om pengar så behöver eleverna också dividera ut kvoten och svara: cirka 28 kr.

Elever måste känna till och kunna använda de algebraiska reglerna för bråk när de arbetar med del:del-förhållanden, del/helhelts-bråk och proportioner, a:b = c:d

Det är skillnad på del:del-förhållanden och del/helhets-bråk (Vergnaud, 1983). Till exempel, om ett företag anställer 11 kvinnor och 31 män representerar del/hels-bråken 11/42 och 31/42 förhållandet mellan kvinnor och män i förhållande till helheten. Om eleverna istället ska beskriva företagets könsfördelning är det del:del-förhållandet 11:31 mellan kvinnor och män som är relevant. Del:del-förhållandet beskriver två delar av samma helhet. Deras summa utgör helheten (här 42).

Elever har visat sig ha svårt att känna igen del:del-förhållanden och att särskilja dem från egenskaperna hos del/helhets-förhållanden (Clark m.fl., 2003). Det är inte lätt för elever att uppnå flyt i situationer som kräver en övergång från del:del- till del/helhets-förhållanden. Dessutom ställer de olika notationerna för förhållanden till huvudbry för eleverna. Vi använder både rakt bråkstreck, snett bråkstreck och kolon för att representera förhållanden (här har vi använt kolon för del-del förhållande och snett bråkstreck för del-helhets förhållande).

Eftersom alla förhållanden kan skrivas i bråkform följer de samma matematiska lagar som bråk. Bråk är en representationsform av tal. Men bråkrepresentationen är inte begränsad till hela tal. Alla tal (1,33; pi; 0,4; roten ur 2) och uttryck kan ingå i en bråkkonstruktion. En bråkkonstruktion kan också kallas en kvotkonstruktion. Alla bråkkonstruktioner följer räknereglerna för bråk. Men eleverna gör fler fel på beräkningar med bråk som inte består av hela ental (Fernández m.fl., 2012; Glaser & Riegler, 2015). Därför behöver eleverna undervisning i att analysera situationer och använda generella resonemang för att lösa dem. Finns ett förhållande så gäller räknereglerna.

Tyvärr definieras bråk ofta fel i läromedel, såväl i Sverige som i andra länder. Bråkrepresentationen sammanblandas ofta med talmängden rationella tal (Niemi, 1996; Thompson & Saldanha, 2003). Men inom matematiken syftar termen "bråk" på allt som är skrivet i den symboliska formen a/b (Ni & Zhou, 2005, s. 29, vår översättning). Det innebär att eleverna ofta får för sig att bråkrepresentationen bara gäller hela tal när det likaväl kan vara decimaltal eller andra tal/uttryck. Det är väldigt begränsande för eleverna att matas med denna felaktiga bild för då faller ju insikten om att alla kvotkonstruktioner följer räknelagarna för bråk (se exempel i Figur 6).

Att kunna skapa en operator på formen *a/b* som transformerar (skalar) ett godtyckligt uttryck *b* till ett godtyckligt uttryck *a* är särskilt viktigt för elevernas utveckling av proportionella resonemang. Förståelsen för att operatorn kan byggas via bråk som multiplikativ invers (reciprok) är likaså en helt central förståelse av bråkbegreppet (Hackenberg & Sevinc, 2022).

Elever behöver kunna identifiera egenskaperna hos geometriska objekt i två och tre dimensioner för att skala rätt

Vi vet att elever tenderar att tillämpa linjärt proportionellt resonemang utan att ta hänsyn till om det är endimensionellt som en linje, tvådimensionellt som en area eller tredimensionellt som en låda. Van Dooren et al. (2010) fann att elever tenderar att använda linjärt proportionellt resonemang på alla dimensioner. Som exempel kan vi tänka på det här problemet:

"En bonde behöver 8 timmar för att gödsla en kvadratisk hage med sidan 200 meter. Ungefär hur lång tid kommer han att behöva för att gödsla en kvadratisk hage med sidorna 600 meter?"

Ett felaktigt linjärt proportionellt resonemang lyder som följer: Eftersom sidan är tre gånger så lång så är tiden tre gånger så lång, alltså $3 \cdot 8 = 24$ timmar. Det här resonemanget missar att sidan är tre gånger så lång på både längden och bredden, så ytan är hela nio gånger större och bonden behöver $3 \cdot 3 \cdot 8 = 72$ timmar för att göra jobbet.

Eftersom skalning är en bärande idé som återkommer såväl i matematiken som i kemi, fysik och biologi är det avgörande för eleverna att få strukturerad undervisning om proportionella resonemang, det vill säga skalning. Skala i en, två och tre dimensioner är ett helt centralt begrepp som är avgörande för att förstå vetenskapliga fenomen (Taylor & Jones, 2009).

Elever behöver känna igen och använda olika konkreta representationer för proportioner, till exempel tabeller, grafer, formler och ritade bilder

Proportionella samband kan representeras på olika sätt, till exempel med ord, bilder, algebraiskt, med grafer eller i tabeller. Enligt Shield och Dole (2013) förstärks elevernas lärande om proportionella samband genom användningen av olika representationer för samma fenomen. Generellt gäller att begreppsförståelse och kopplingar mellan begrepp växer av att eleverna har tillgång till flera representationer för att hantera olika situationer (Vergnaud, 2009). Dessutom förbättras elevernas förmåga att se samband mellan problem som är baserade på samma matematiska idé, så att de exempelvis kan lära sig se att problem med saknade värden om likhet, proportionella funktioner och hastighetsproblem kan illustreras med olika representationer men hanteras med samma matematiska idé eller metod/verktyg.

Hur återspeglas forskningen om proportionella resonemang i våra svenska matematikläromedel?

Det korta svaret är att vi inte ser några tydliga tecken på att läromedlen återspeglar kunskap från forskning om elevers begreppsbildning av proportionella resonemang. År 2014 gjorde jag (Ahl) en läromedelsgranskning i samband med min licentiatuppsats som handlar om potentialen för läromedel att ge läraren stöd för sin undervisning (Ahl, 2014, 2016). Fokuset var proportionella resonemang vilket också gjorde det oundvikligt att även hur läromedlen hanterar bråk hamnade under lupp (eftersom en av definitionerna av proportionella resonemang är en likhet mellan två förhållanden). Två välanvända svenska läromedelsserier för matematikundervisning granskades. Resultatet var nedslående. I princip inget av de solida resultat som forskningen har gett oss (se ovan) återspeglades i de läromedelsserier som studerades 2014. Med lite god vilja visade resultaten en ganska god bredd i användningen av olika representationer i samband med arbetet med proportionella grafer. I övrigt gick det inte att finna någon systematik för att synliggöra att en och samma matematiska idé återkommer i samtliga behandlade matematiska områden där multiplikation används.

I arbetet med den här rapporten återvände vi till samma läromedelsserier. Läromedlen har uppdaterats i samband med Lgr22, där proportionella resonemang har fått ett större utrymme. Trots detta upprepas bilden av att proportionella resonemang presenteras i läromedel utan inflytande av den kunskap från forskning som har presenterats ovan.

Eftersom bråkrepresentationen är helt central för de proportionella resonemangen undersökte vi också hur begreppen bråk och division introduceras i två läromedelserier för hela grundskolans årskurs 1–9. Vi fann att eleverna har små möjligheter att förstå bråk som något annat än en del av en helhet, ofta en pizza, och alltid med hela tal (Ahl & Helenius, 2024). Anledningen till att endast hela tal används beror med största sannolikhet på den felaktiga definitionen av bråk som rationella tal, som tillämpas explicit genom att det står i boken att bråk alltid konstrueras med hela tal eller implicit eftersom det bara introduceras bråk av hela tal i läromedlen.

$$\frac{7}{4} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{a/b}{a} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n} \qquad \frac{0.5}{6.7} \qquad \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad \frac{x^2+1}{2x^3-4x}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{a} = 1 \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

Figur 6. Exempel på bråkrepresentationer och regler som gäller för dem.

Som vi har beskrivit i avsnittet om multiplikation och division, introduceras division med situationer där saker ska delas upp. Det ger kvoter av heltal där täljaren är större än nämnaren, vilket är helt rimligt när eleverna är små. Men för att divisionsbegreppet ska bli komplett behöver eleverna lära sig att det går att dividera vilka kvoter som helst. Men i stället förstärks bilden av division som en kvot av heltal där täljaren är större över åren och utmanas bara tillfälligt när tal i decimalform ibland behandlas (Ahl & Helenius, 2024). Den ensidiga bilden av division förstärker det som i forskning kallas heltalsbias (Ni & Zhou, 2005), som vi har beskrivit ovan (i relation till division är heltalsbias en missuppfattning om att om man dividerar ett tal så blir svaret mindre än talet i täljaren).

Här är det på sin plats att belysa vad division har med bråkbegreppet att göra. Fundera på den här situationen: *Tre elever ska dela på en tårta. Hur mycket tårta får var och en?*

Här behövs en division av en tårta på tre elever. Den ser vi på vänster sida av likhetstecknet. Vi utför beräkningen och kommer fram till att varje elev får en tredjedel. Det ser vi på höger sida om likhetstecknet.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Figur 7. Beräkningen och lösningen.

Det förefaller vara något underligt med den här beräkningen eftersom uttrycken till vänster och höger är exakt lika. Att det ser ut så här beror på att konstruktionen *a/b* är *polysemisk*, det vill säga har många betydelser. 1/3 kan vara både en kvot att dividera och ett tal skrivet i bråkform men även ett del:del förhållande eller ett del-helhets förhållande eller en skalfaktor att multiplicera med. Om eleverna ska lära sig att navigera mellan dessa olika betydelser och våga lita på att samma räkneregler gäller alla sorters bråkkonstruktioner så behöver eleverna presenteras för olika typer av bråk och divisioner i läromedlen. Något som inte gjordes i de läromedel vi undersökte (Ahl & Helenius, 2024). Särskilt anmärkningsvärt är en total avsaknad av introduktion av bråk som operator. Även Hedlund (2020) fann att det på motsvarande sätt saknades stöd för att utveckla matematisk förståelse för bråkbegreppet i en undersökning av läromedel för årskurs 9 och kurs 1 på gymnasiet. Berggren (2022) har visat hur bråk i svenska läromedel huvudsakligen beskrivs som antal delar och markerade delar i geometriska figurer, det vill säga via del-helhets representationer, vilket alltså i forskning har visat sig vara ineffektivt (Zhang m.fl., 2015). Det är uppenbart att vi behöver förbättra hur den svenska skolan lär ut proportionella resonemang, inte minst bråk.

Algebra

De flesta minns algebra från sin skoltid som "något med x" och kopplar kanske ihop det med ekvationer, men i modern tolkning har algebra en mer fundamental roll. Svensk matematikundervisning har traditionellt ett mindre fokus på algebra än många andra länder, vilket också syns i våra resultat i internationella mätningar (Grønmo, 2018). Detta har varit känt länge. Redan i kommentarmaterialet till 1994 års kursplan i matematik för grundskolan skriver författarna att "[s]venska grundskoleelevers kunskaper i algebra har visat sig bristfälliga vid internationella jämförelser. Många elever på gymnasielinjer har problem med förståelse av och färdigheter i transformationer, förenklingar och tillämpningar av formler och uttryck. Det har också visat sig att matematikundervisningen i Sverige förbereder övergången från att arbeta med tal till att arbeta med bokstäver senare än i andra länder" (Skolverket, 1997, s. 29). Det konstateras även att:

> *[a]lltfler behöver kunna tolka t ex formler och algebraiska samband. Algebra är inte längre något som skall studeras enbart av de som går vidare på matematikintensiva gymnasieprogram. Det har visat sig viktigt att söka förenkla övergången och se likheter och skillnader mellan att räkna med tal och med bokstäver. (Skolverket, 1997, s. 26)*

Det argumenteras för att:

> *[d]et är viktigt att försöka få en mjukare, mer meningsfull övergång till symbolspråk. Intresse och förståelse för matematik med symboler kan stimuleras i arbete med mönster. Mönster av olika slag möter man varje dag – geometriska mönster i golvplattor, murar och dekorationer – talmönster i almanacka, reklammaterial och multiplikationstabell. Avsikten är att studier av mönster och relationer skall fördjupa elevers omvärldsuppfattning, utveckla tal- och rumsuppfattning och ge stimulerande och konkret förberedelse för algebra och funktioner. Genom att diskutera regelbundenheter i händelser, former och talföljder kan man också få upplevelser om hur man kan generalisera och symbolisera. Detta kan ge en god grund inför arbetet med algebra. (Skolverket, 1997, s. 29)*

Som vi ska visa är den vägen in i algebra som rekommenderas här, via geometriska mönster, bara en av flera, och kanske inte ens en särskilt effektiv väg (Radford, 2014). Det är också symptomatiskt att kursplanen från 1994 nämner algebra endast en gång, i formuleringen "Strävan skall också vara att eleven utvecklar [...] sin förmåga att förstå och använda [...] grundläggande algebraiska begrepp, uttryck, formler, ekvationer och olikheter”. I avsnittet *Bedömningens inriktning* eller i kriterier för olika betygssteg nämns ingenting om algebra utan berör bara kortfattat ekvationer, likheter, mönster och funktioner.

I 2011 års kursplan poängteras algebran tydligare som ett av sex centrala innehållsområden som beskrivs för vart och ett av de tre stadierna 1–3, 4-6 och 7-9, vilket är ett arrangemang som behålls i Lgr22. För årskurs 1–3 nämns matematiska likheter och mönster i talföljder och geometri i Lgr11. I Lgr22 läggs formuleringen "obekanta tal och hur de kan betecknas med en symbol" till. För årskurs 4–6 nämns i Lgr11 obekanta tal, algebraiska uttryck och ekvationer, metoder för ekvationslösning samt mönster. I Lgr22 har detta kompletterats med en särskild fras om likheter. För årskurs 7–9 nämns variabelbegreppet och dess roll i formler, uttryck och ekvationer; algebraiska uttryck och ekvationer i sammanhang som är relevanta för eleven, samt enkla metoder för ekvationslösning. I Lgr22 har detta kompletterats med en formulering om matematiska likheter och en om mönster, samt en högre specifikationsgrad av vilka slags ekvationer som ska kunna lösas.

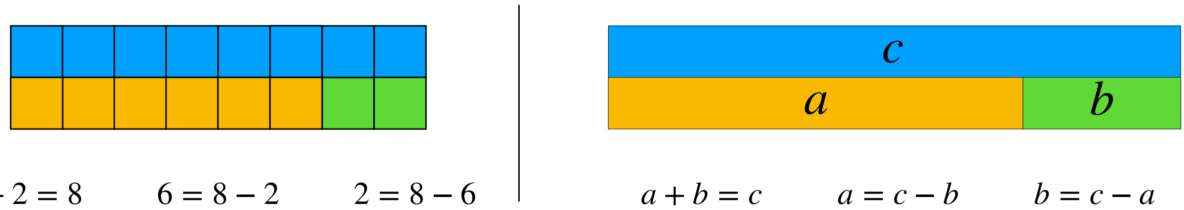
Överlag har alltså kursplanerna som blev gällande 2011 och 2022 tydligt markerat algebra som ett allt viktigare område och formuleringarna om algebra är också ganska breda till sin karaktär. Kilhamn m.fl. (2019) ger en mer fullständig översikt över kursplanerna från 1962 till 2017-revisionen av Lgr11 än vad vi gjorde ovan, och även där syns en tydlig breddning och tidigareläggning av skolans algebra. Vi ska återkomma till en diskussion om detta i slutet av avsnittet.

Vad säger då den matematikdidaktiska forskningen om området algebra? Vi kommer här inte att fokusera på forskning om specifika problem som elever i Sverige (liksom världen över) kan ha med algebra utan snarare fokusera på hur synen på hur algebra bör integreras i skolan har växt fram från 80-talet och framåt. Eftersom det har gjorts flera internationella sammanställningar över sådan forskning så är det relativt enkelt att överblicka. Traditionellt har algebra mest uppfattats som räkning med bokstäver, som när man löser ekvationer och skapar matematiska uttryck, funktioner eller formler. I de flesta länderna har algebra traditionellt introducerats när eleverna är runt 12 år. Men från ca 80-talet började det uppmärksammas att det skulle vara fördelaktigt att börja skola in elever i ett algebraiskt tänkande redan från skolstarten. Den anglosaxiska termen för detta var *early algebra*, och vi kommer att benämna begreppet med termen *tidig algebra*.

Tidig algebra är inte detsamma som att börja med algebra tidigt. Snarare gjordes analyser av vad som kan tänkas utgöra algebraiskt tänkande, det vill säga den typ av tankemönster som involverar generaliserande och strukturellt tänkande som behövs för att senare kunna tillgodogöra sig formell algebra. Det kan till exempel involvera att förstå räkneoperationers sammanhang och struktur genom att analysera situationerna där operationerna förekommer (Vergnaud, 1982, 1983), att introducera formell notation tidigt (men också gradvis) eller att inkludera algebraiskt tänkande i andra matematiska områden, inte bara specifikt arbeta med algebra ibland utan använda algebraiska tankeformer även när man till exempel arbetar med problemlösning, geometri eller statistik, samt självklart även i aritmetiken (D. W. Carraher m.fl., 2017).

Ett pågående arbete i forskning om tidig algebra och skolalgebra i allmänhet har varit att försöka hitta lämpliga komponenter eller aspekter av algebra som man kan identifiera och arbeta med i de tidiga skolåren men som också följer med upp i de senare skolåren. Det finns flera ofta citerade sådana uppdelningar, till exempel av Kaput (2018). En välanvänd karakterisering av olika aspekter av algebra som bygger på Kaputs arbete har tagits fram av Blanton m fl (2018). De särskiljer tre aspekter av tidig algebra: a.) allt som har med likheter, ekvivalens, ekvationer och olikheter att göra; b.) generaliserad aritmetik, som de ser som strukturen i matematiska operationer; samt c.) funktionellt tänkande som handlar om hur olika fenomen kan representeras och hanteras med matematiska funktioner. Vi ska återkomma till denna klassificering, men baserat på Blantons m.fl. arbete (2018) och flera andra karakteriseringar (D. Carraher & Schliemann, 2020; Kieran, 2004, 2018b) väljer vi att lyfta fram fyra kategorier som vi kommer att använda i vår läromedelsanalys.

Algebra som struktur. Med algebra som struktur avser vi när algebraiska tankesätt används för att bättre förstå (huvudsakligen) tal och aritmetiska operationer. På den högre matematiska nivån handlade en stor del av 1800- och 1900-talens utveckling inom algebra om så kallas abstrakt algebra, vilket just handlar om algebra som struktur (Kieran, 2018a). Men redan i de första skolåren finns det mycket att vinna på att ha med detta perspektiv. Till vänster i Figur 8 ser vi till exempel att delarna 6 och 2 tillsammans skapar helheten 8, det vill säga att $8 = 6 + 2$. Men vi kan också se om man tar bort den gröna kvantiteten från den så återstår den gula, det vill säga $6 = 8–2$ och på samma sätt att $2 = 8–6$. Det här illustrerar sambandet mellan addition och subtraktion i en enda kraftfull schematisk bild. De tre likheterna $8 = 6 + 2$, $6 = 8–2$ och $2 = 8–6$ bildar en additiv talfamilj. Men naturligtvis var det inget särskilt med de specifika talen 2, 6 och 8 utan så snart man har en giltig addition har man också två subtraktioner, och har men en giltig subtraktion har man också en addition och en annan subtraktion. På ett helt generellt plan illustreras detta i den högra delen av Figur 8. På samma sätt kan man arbeta med relationen mellan multiplikation och division, hur likhet fungerar och mycket mer.



$6 + 2 = 8 \qquad 6 = 8 - 2 \qquad 2 = 8 - 6$

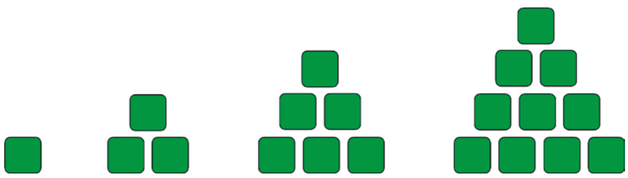
$a + b = c \qquad a = c - b \qquad b = c - a$

Figur 8. Samband mellan addition och subtraktion representerat med olika grad av generalitet.

Algebra som operationer på icke-numeriska symboler. Denna kategori av algebra är i någon mening den klassiska. I den förra kategorin kan man säga att man använda algebraiska tekniker, det vill säga generaliserande och strukturerande, för att förstå aritmetiken, men i den här kategorin är det snarare frågan om att utvidga den aritmetik man kan hantera med talsymboler till att gälla för andra symboler än siffror. Typiskt är det frågan om bokstäver, men även andra symboler som i uttrycket 6 + _ = 8 + 2. Det huvudsakliga användningsområdet för detta är ekvationer, det vill säga där man sätter upp aritmetiska likheter med en obekant (som ett *x*), och där likheten är sann för vissa värden på *x* som man med olika aritmetiska tekniker kan hitta. Det är vanligt att ekvationer i de yngre skolåren introduceras med hjälp av andra symboler än bokstäver (Radford, 2022). Även manipulation av uttryck, som t ex 2a + 4b + 2a + 4b = 4a + 8b finns i denna kategori.

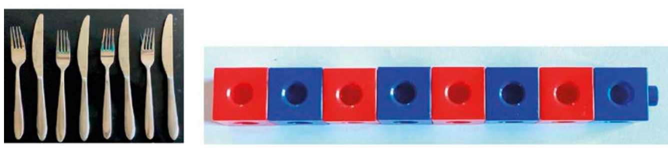
Algebra som funktionellt tänkande handlar om att representera och hantera matematisk eller andra samband med hjälp av olika matematiska tekniker. Om jag kör bil i 100 km/h kan man till exempel beskriva sträckan i kilometer jag åkt med sambandet s = 100t, där t är tiden i timmar. Man skriver ofta s(t) = 100t, för att indikera att variabeln s är en funktion av t. Men redan tidigt i skolan kan man börja att tänka i termer av funktioner och träna sig på att beteckna olika samband med hjälp av aritmetiska uttryck som innehåller symboler för variabler. Studiet av funktioner räknas oftast inte som en del av algebran inom den formella matematiken, men det finns en lång tradition till att se det som en del av algebra i skolmatematiken, och alltså även en del av den tidiga algebran (Kieran, 1994).

Algebra som geometriska mönster. Att uppfatta och beteckna mönster är viktiga delar av alla tre kategorier ovan, men eftersom geometriska mönster har en så speciell roll inom särskilt den tidiga algebran, så väljer vi att se den som en egen kategori. Det ska påpekas att en vanlig uppgiftstyp handlar om att hitta, det vill säga fortsätta, mönster i talföljder som 0, 3, 6, 9, men det ser vi som en del av algebra som struktur eller som funktionellt tänkande i de fall man betecknar mönstret som en funktion. (Mulligan m.fl., 2020). Huvudsakligen, men inte enbart, är det två slags mönster som förekommer i skolmatematiken, växande mönster som i Figur 9 och upprepande mönster som i Figur 10.



Figur 9. Ett växande mönster.

ABABABAB



Figur 10. Tre upprepande mönster som har samma struktur.

För mönstren i Figur 9, är en vanlig fråga att be eleverna rita nästa figur, men också att beräkna antalet element i figur nummer 10 eller 100, vilket är ett exempel på hur man måste kombinera förmågan att förutspå mönstrets tillväxt med förmågan att skapa en funktion för hur antalet element beror på figurnumret, det vill säga något från vår föregående algebrakategori.

Naturligtvis överlappar dessa fyra kategorier mycket, men vi vill ändå mena att de både ramar in de senaste ca 40 årens forskning om skol-algebra och är tillräckligt avgränsade för att kunna användas till att analysera läroböcker, vilket är vad vi ska göra härnäst.

Hur återspeglas forskningen om algebra i svenska matematikläroböcker?

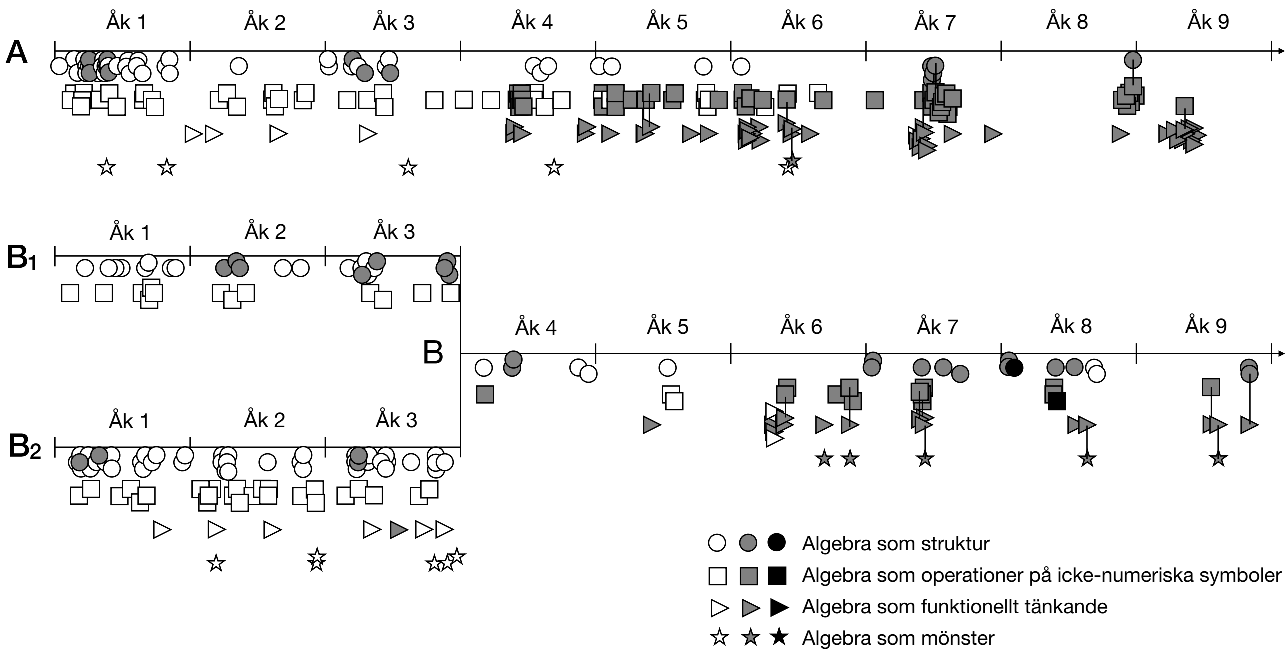
Vi kommer i detta avsnitt att titta på studier av algebra i svenska matematikläroböcker för grundskolan, varav en är vår egen studie. Det betyder att vi väljer bort några studier som inte matchar vårt syfte. Jakobsson-Åhl (2008) jämförde gymnasieböcker från år 1960 och år 2000 och konstaterade huvudsakligen att algebrainnehållet i textuppgifter hade blivit mer vardagligt och mindre komplext (Jakobsson-Åhl, 2008). Det är en intressant observation för oss, men inte fullt relevant för att det är ganska gamla resultat och också gäller gymnasiet. Bråting och Kilhamn (2022) undersöker hur programmering representeras i svenska matematikläroböcker för grundskolan. På grund av en del märkliga val i just Sverige, finns mycket av programmeringen i grundskolan beskriven just inom avsnittet algebra (Helenius & Misfeldt, 2021). Men detta val har lite att göra med den internationella forskningen om skolalgebra, och det har dessutom visat sig svårt att konstruera programmerings-uppgifter som också bidrar till lärandet av matematik (Kilhamn m.fl., 2022). Därför har vi inte i vår undersökning bekymrat oss om programmering. Se dock Helenius m.fl. (2018) och Ahl och Helenius (2022) för en ytterligare diskussion.

De två studierna vi ska koncentrera oss på är Bråting m.fl (2019) och vår egen. Bråting och kollegor undersökte två läromedelsserier från svenska förlag. De noterade för varje sida om sidan innehöll algebra eller ej och i så fall av vilken typ. De klassificerade olika slag av algebra med hjälp av Blantons m.fl. Ramverk (2018) i kategorierna *likhetsaspekter* (allt som har med likheter, ekvivalens, ekvationer, och olikheter att göra), *generaliserad aritmetik* som handlar om aritmetisk struktur och *funktionellt tänkande*. De delade upp resultatet på årskurs 1–3 och 4–6 och på larboksserie. Deras viktigaste resultat var att medan kategorierna likheter och funktionellt tänkande med viss variation var tämligen välrepresenterat, så var generali-serad aritmetik svagt representerat i den ena bokserien och knappt alls i den andra.

I den studie vi själva har genomfört (Helenius & Ahl, 2024) undersökte vi algebra-innehåll på varje boksida i linje med Bråting och kollegor. Vi gjorde dock en finare indelning i form av en tidslinje. Vi använde också de fyra kategorierna som vi beskrivit ovan, det vill säga algebra som *struktur*, som *operationer på icke-numeriska symboler*, som *funktionellt tänkande* och som *geometriska mönster*. Dessutom tillförde vi en annan dimension, nämligen en gradering av hur explicit förekomsten av algebra var. I ett uttryck som 3 + _ = 8 går det att hitta ett begynnande algebrainnehåll, men om det inte lyfts av läraren kan uppgiften också betraktas som en ren aritmetikuppgift. Vi kallade sådana förekomster för *potentiell* algebra. När det antingen användas bokstäver eller när den algebraiska tolkningen på annat sätt framkom i uppgiften, så kallade vi förekomsten *formell*. Slutligen sökte vi efter uppgifter där algebran i sig blev föremål för intresse. Ett resonemang som liknade högersidan av Figur 8, eller ett bevis av att (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd är två exempel. Vi kallade sådana förekomster *explicita*. Idealet tänkte vi att algebraförekomsterna skulle gå från det potentiella till det formella, men också att det från relativt tidiga årskurser skulle finnas inslag av det explicita, där algebraiska sätt att tänka blev fokus.

Figur 11 är en sammanställning av våra resultat av en undersökning av två läroboksserier från årskurs 1–9, A och B, vara den ena undersöktes i en nyare (A_1) och äldre (A_2) variant får årskurserna 1–3. Till och med årskurs 6 finns en bok A för hösten och bok B för våren i alla undersökta bokserier, så varje årskurs består av två böcker. Vi har alltså totalt analyserat 36 böcker med totalt ca 4 100 sidor.

Det vi ville undersöka är ungefär *när* under grundskolans matematik algebra förekommer, *vilket slags algebra som förekommer* och om det finns någon *progression* från potentiell, via formell till explicit algebra. Varje sida med en viss typ av algebra kategoriserades som en (eller ibland fler) av de fyra beskrivna algebratyperna. I Figur 11 beskrivs dessa med olika symboler, förklarade i figuren. *Vita* symboler är potentiell algebra, *gråa* formell och *svarta* explicit algebra. För att kunna skapa en tidslinje gjorde vi sedan approximationen att lika många sidor av boken behandlas per dag, så att en sidas placering i boken kan användas som mått på när på terminen eller året sidan behandlas.



Figur 11. Algebraförekomster i två bokserier. Vit motsvarar potentiella förekomster, grå formella, och svart explicita.

Eftersom bilden är tämligen komplex ska vi beskriva några viktiga observationer i en punktlista.

1. Som förväntat sker ett skifte från potentiell till formell algebra när vi går från lågstadiet och uppåt, även om också lågstadiets böcker innehåller några formella förekomster av algebra som struktur. Mer förvånande är att det nästan inte förekommer någon algebra som vi klassificerade som explicit.

2. I de tidiga årskurserna är algebra-innehållet relativt väl spritt över skolåret, särskilt i årskurs 1. Men i allt högre grad blir algebran inboxad. Det syns i bokserie A_1 faktiskt redan från och med årskurs 2 och i serie B från och med årskurs 7 men särskilt tydligt i årskurs 8 och 9. I praktiken betyder detta att algebra i allt högre grad behandlas i egna kapitel och att algebraiska tekniker inte utnyttjas i andra delar av matematiken. Det är något svårt att se i bilden, men allra mest spridd är matematiken i höstboken 1a i serierna A_2 och B. Denna trend bekräftas för övrigt i ett färskt examensarbete som undersökt området likhet i fyra läroboksbokserier för årskurs 1 (Johansson, 2024).

3. Den nyare serien A_2 har mer och mer utspritt algebrainnehåll än A_1 och täcker också upp de fyra typerna av algebra bättre även om tyngdpunkten fortfarande är på struktur och icke-numeriska symboler. Vi tolkar det som att författarna har påverkats av att nyare kursplaner poängterar tidig algebra.

4. A-serien har väldigt lite algebra i årskurs 4 och 5 och dessa böcker är i praktiken algebrafria, i radikal kontrast till lärobokserie B i samma årskurser, och även till A_2 i tidigare årskurser. A-böckerna för mellanstadiet är ganska gamla, och man kan tänka sig att de representerar en tid med mindre algebrafokus i kursplanerna än nu.

5. Klassen algebra som struktur är tydlig i 1–3. men tunnas sedan ut, särskilt i serie B. Serie B övergår alltså till att nästan inte alls använda algebraiska tekniker för att kasta ljus på aritmetiken och i stället arbeta mer begränsat med en mer traditionell typ av algebra, representerat av den formella typen av algebra som operationer på icke-numeriska symboler. Dessa resultat stämmer väl med Bråting m.fl. (2019). Skälet att vi trots allt ser mer av algebra som struktur än de ser av generaliserad algebra (som är deras motsvarande kategori) är att vi har med algebraiska aspekter av likheter i vår kategori (och denna aspekt utgör den absoluta huvuddelen av förekomsterna i de av oss granskade läromedlen).

6. I allmänhet har klassen algebra som operationer på icke-numeriska symboler den tydligaste närvaron, med algebra som struktur som den klara tvåan, därefter algebra som funktionellt tänkande och sist algebra som geometriska mönster.

7. Båda bokserierna har förhållandevis lite algebra i årskurs 9, serie B även på vårterminen i årskurs 6. Detta verkar bero på att de flesta sidorna ägnas åt en slags repetition inför nationella proven, och att det inte bedöms vara centralt med en algebraisk approach i en sådan repetition.

Sammantaget tycker vi oss se en viss intention att anpassa sig till det sätt att se på algebra som i forskning kallas *tidig algebra*. Denna intention är tydligast i de tidiga skolåren och i böcker med senare publiceringsdatum. Det är tänkbart att det faktum att kursplanen nämner algebra mer explicit och tidigare har påverkat detta.

När vi dock tittar närmare är denna intention långt ifrån genomförd på ett sätt som överensstämmer med den syn på algebra och tidig algebra som dominerar forskningen. De tidiga årens algebra är i hög grad enbart potentiell algebra. Det krävs att läraren på eget bevåg explicit 'gör något algebraiskt' av uppgifterna för att eleverna ska ledas in mot algebraiska tankesätt och inte bara uppfatta uppgifterna som ren aritmetik.

Algebra som struktur försvinner också nästan helt i senare årskurser. Det här beror på att böckerna istället har ett extremt fokus på positionssystemet och olika typer av beräkningstekniker som baseras på talsorter. Detta är i sig en viktig sak, men det hjälper mycket lite för att ge eleverna en god praktisk kännedom om aritmetikens regler, vilket är just det som en strukturerad approach är tänkt att göra. Att multiplikation och division som vi har visat behandlas på ett så ostrukturerat sätt (i serie A och B) är en tydlig manifestation av att algebra som struktur tunnas ut redan från årskurs 2.

Ännu ett tecken på att böckerna inte kan sägas representera en forskningsbaserad syn på algebra är att det saknas progression från potentiell till explicit algebra, och att explicit algebra är så sällsynt. Den bokserie som har mest algebra är samtidigt den där algebran är av ett mer traditionellt slag, med få inslag av den utveckling av tidig algebra och algebra som struktur som lyfts fram i forskningen.

Att algebran blir så tydligt inboxad i egna avsnitt i senare årskurser är också ett tecken på att den algebra som böckerna tar upp nästan inte alls används i övrig matematik. Detta berövar eleverna möjligheten att vänja sig vid att använda algebra som ett naturligt matematiskt verktyg, vilket är en av de mest tydliga intentionerna som man kan läsa ut av forskningen på skolalgebra.

Det är också intressant i sig att två bokserier kan vara så radikalt annorlunda, trots att de används i samma skolsystem och ska utgå från samma kursplan. Båda serierna är vanligt förekommande men ger eleverna helt olika förutsättningar att bekanta sig med algebra. I ljuset av att vi inte har någon läromedelsgransking och att kursplanens beskrivningar trots allt är mycket allmänt hållna är kanske detta inte så förvånande.

Avslutande reflektioner

De böcker som vi har granskat är vanligt förekommande och vi tror att det är rimligt att anta att innehållet i dessa böcker i stort speglar den undervisning som Sveriges elever huvudsakligen får ta del av. Låt oss nu återvända till saltblandningsproblemet som vi inledningsvis använde för att illustrera de brister i grundläggande matematikkunskaper om procentbegreppet och förmågan att utföra proportionella resonemang som 93 procent av eleverna i kurs 1a uppvisade på det Nationella provet vårterminen 2023. Vi menar att – utifrån de läroböcker vi har granskat – är det ganska förutsägbart att vi får detta nedslående resultat. Samtidigt är den matematikdidaktiska forskningen om multiplikativa strukturer, proportionella resonemang och ett strukturerat förhållningssätt till aritmetiken (tidig algebra) ganska tydlig med hur det borde se ut i stället. Vi vill samtidigt förtydliga att vi inte har granskat huruvida läromedlen kan sägas överensstämma med kursplanen i matematik med tillhörande kommentarmaterial. Algebra och proportionella resonemang omnämns relativt noga i både kursplan och kommentarmaterial, dock utan att det är i närheten av den specificitet som man kan härleda ur den forskning vi har beskrivit. Multiplikation och division nämns å andra sidan inte alls i kursplanen och endast i en bisats i kommentarmaterialet. Läromedel kan alltså mycket väl sägas vara i linje med kursplanen och ändå inte alls vara i linje med resultaten från forskningen.

Vilka slutsatser kan dras av detta? Vi vill särskilt lyfta tre punkter:

1. Utifrån nu gällande kursplan Lgr22 med tillhörande kommentarmaterial går det inte att urskilja de viktigaste långsiktiga progressionslinjerna i skolmatematiken.

2. Det är svårt för enskilda lärare eller läromedelsförfattare att överblicka, sammanställa och komprimera aktuell forskning om olika matematiska innehållsområden så att den kan tillämpas för läromedelsproduktion eller undervisning.

3. Läromedelsförfattare har höga ambitioner att skapa goda resurser för lärande men så länge det är otydligt i styrdokumenten vad som ska förmedlas så riskerar kultur och tradition snarare än kunskap från forskning att styra innehållet.

Förändring av undervisningspraktik är svårt. Men det är skillnad på förändring och förändring. Lärares rutiner och den generella undervisningskulturen är svåra att förändra (Helenius & Ahl, 2023). Men en förändring av innehåll i undervisningen, utan krav på förändring av klassrumsrutiner, har i implementeringsforskningen visat sig fungera bra (Prytz, 2023b; Prytz m.fl., 2022a).

Det går att vara kritiskt mot att svensk matematikundervisning i hög utsträckning är läromedelsberoende. Men istället för att kritisera läromedelsberoendet föreslår vi att vi ser det som en tillgång och ett medel för att förbättra matematikundervisningen och kunskapsresultaten. Om vi vill ändra hur visst matematiskt innehåll presenteras, med vilket ämnesspråk det ska presenteras och med en tydlig progressionen av innehållet så har vi i läromedlen en utmärkt plattform för förändring.

Enligt vår erfarenhet är läromedelsförfattare och förläggare mycket receptiva för förändringar i läroplaner och dessutom benägna att ta till sig forskning när den presenteras på ett anpassat sätt. De läromedelsserier vi granskat här förefaller också har förbättrats över tid, om än inte tillräckligt. Vi menar därför att det vore rimligt att kursplan och kommentarmaterial skrevs så att de betydligt tydligare kunde stödja utveckling av läromedel, åtminstone för de allra viktigaste matematiska innehållsområdena (inklusive de vi har diskuterat i denna rapport).

Här finns det länder med kursplaner som skulle kunna fungera som förebilder (Prytz, 2023a) men det behövs också en anpassning till de svenska traditionerna. Som vi tidigare har föreslagit (Helenius & Ahl, 2023) skulle ett sätt att kunna ta fram en sådan kursplan vara att först ta fram ett kommentarmaterial som tydligt beskriver och exemplifierar centrala begrepp och där forskning om kända missuppfattningar synliggörs med tillsammans med förslag på hur sådana missuppfattningar kan förhindras eller bemötas.

Sammantaget ser vi stor potential att uppfylla skollagens krav på en skola vilande på vetenskaplig grund genom läromedel vilande på vetenskaplig grund. Vi behöver dock se till att läromedelsförfattare och förlag får det stöd som behövs för att göra genomgripande förändringar i matematiskt innehåll, ämnesspråk och sekvensering av matematiskt innehåll.

Referenslista

Bachelard, G. (1938). La formation de l'esprit scientifique [The formation of the scientific mind]. Paris, France: Vrin.

Ahl, L. M. (2014). *Approaching Curriculum Resources: Examining the potential of textbooks and teacher guides to support mathematics learning and teaching* [Licentiate Thesis]. Mälardalen University.

Ahl, L. M. (2016). Research findings' impact on the representation of proportional reasoning in Swedish mathematics textbooks. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education*, *5*(2), 180–204. https://doi.org/doi:http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2016.1987

Ahl, L. M. (2019). Designing a research-based test for eliciting students' prior understanding on proportional reasoning. *Adults Learning Mathematics: An International Journal*, *14*(1), 6–22.

Ahl, L. M., & Helenius, O. (2022). New Demands on the Symbols and Formalism Competency in the Digital Era. I U. T. Jankvist & E. Geraniou (Red.), *Mathematical Competencies in the Digital Era* (s. 159–176). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-10141-0_9

Ahl, L. M., & Helenius, O. (2024). *Is it a fraction or should I divide*. Manuscript submitted to the 47th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Auckland.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). *Rational number, ratio, and proportion.*

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. I R. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (s. 91–125). Academic Press.

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational studies in Mathematics*, *12*(4), 399–420.

Berggren, J. (2022). Some Conceptual Metaphors for Rational Numbers as Fractions in Swedish Mathematics Textbooks for Elementary Education. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *0*(0), 1–14. https://doi.org/10.1080/00313831.2022.2114541

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L., & Stylianou, D. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (s. 27–49). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Bråting, K., & Kilhamn, C. (2022). The Integration of Programming in Swedish School Mathematics: Investigating Elementary Mathematics Textbooks. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *66*(4), 594–609. https://doi.org/10.1080/00313831.2021.1897879

Bråting, K., Madej, L., & Hemmi, K. (2019). Development of algebraic thinking: Opportunities offered by the Swedish curriculum and elementary mathematics textbooks. *Nordisk matematikkdidaktikk, NOMAD:[Nordic Studies in Mathematics Education]*, *24*(1), 27–49.

Carraher, D., & Schliemann, A. D. (2020). Early Algebra Teaching and Learning. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 249–252). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_54

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2017). Early algebra is not the same as algebra early. I *Algebra in the early grades* (s. 235–272). Routledge.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational studies in mathematics*, *64*, 293–316.

Clark, M. R., Berenson, S. B., & Cavey, L. O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 297–317.

Dooren, W. V., Bock, D. D., Vleugels, K., & Verschaffel, L. (2010). Just Answering … or Thinking? Contrasting Pupils' Solutions and Classifications of Missing-Value Word Problems. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(1), 20–35. https://doi.org/10.1080/10986060903465806

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2012). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *European Journal of Psychology of Education*, *27*(3), 421–438. https://doi.org/10.1007/s10212-011-0087-0

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, 3–17.

Glaser, K., & Riegler, P. (2015). Beginning students may be less capable of proportional reasoning than they appear to be. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *34*(1), 26–34. https://doi.org/10.1093/teamat/hru025

Greer, B. (1987). Brief Report: Nonconservation of Multiplication and Division Involving Decimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(1), 37–45.

Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 61–85.

Grønmo, L. S. (2018). The role of algebra in school mathematics. I G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Red.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (s. 179–194).

Hackenberg, A. J., & Sevinc, S. (2022). Middle school students' construction of reciprocal reasoning with unknowns. *The Journal of Mathematical Behavior*, *65*, 100929. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100929

Harel, G., Behr, M., Post, T., & Lesh, R. (1994). The impact of the number type on the solution of multiplication and division problems: Further considerations. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 363–384.

Hedlund, J. (2020). *Bråket om läroboken. En kvantitativ innehållsanalys om tal i bråkforms utveckling i läroböcker från högstadiet till gymnasiet* [Självständigt arbete]. Göteborgs universitet.

Helenius, O., & Ahl, L. M. (2023). *Hur bör man förändra kursplaner i matematik? – Argument från den internationella forskningen* (Näringslivets skolforum, s. 30). Svenskt Näringsliv.

Helenius, O., & Ahl, L. M. (2024). *A framework for analyzing long-term early algebra progression in textbook series.* Manuscript submitted to the 47th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Auckland.

Helenius, O., & Misfeldt, M. (2021). Programmeringens väg in i skolan – en jämförelse mellan Sverige och Danmark. I K. Bråting, C. Kilhamn, & L. Rolandsson (Red.), *Programmering i skolmatematiken – möjligheter och utmaningar* (s. 37–53). Studentlitteratur.

Helenius, O., Misfeldt, M., Rolandsson, L., & Ryan, U. (2018). *Om programmering i matematikundervisningen* [Matematikundervisning med IKT II]. Skolverket.

Izsák, A., Beckmann, S., & Stark, J. (2021). Seeking Coherence in the Multiplicative Conceptual Field: A Knowledge-in-Pieces Account. *Cognition and Instruction*, 1–46.

Jakobsson-Åhl, T. (2008). Word problems in upper secondary algebra in Sweden over the years 1960–2000. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *13*(1), 7–27.

Johansson, I. (2024). *Jämför, jämför, jämför. Likhetstecknets statiska betydelse i matematikläroböcker* [Självständigt arbete i lärarutbildningen]. Göteborgs universitet.

Kaput, J. J. (2018). Linking representations in the symbol systems of algebra. I *Research issues in the learning and teaching of algebra* (s. 167–194). Routledge.

Kieran, C. (1994). A Functional Approach To The Introduction Of Algebra—Some Pros And Cons. I J. P. de Ponte & J. F. Matos (Red.), *Proceedings of the international group for the psychology of mathematics education (PME) 18*. The international group for the international group for the psychology of mathematics education.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The mathematics educator*, *8*(1), 139–151.

Kieran, C. (2018a). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A Fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (s. 79–105). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_4

Kieran, C. (Red.). (2018b). *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5

Kilhamn, C., Bråting, K., Helenius, O., & Mason, J. (2022). Variables in early algebra: Exploring didactic potentials in programming activities. *ZDM–Mathematics Education*, 1–16.

Kilhamn, C., Häggström, J., & Fedriksson, M. (2019). *Algrebra i grundskolan*. Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM.

Mulligan, J., Oslington, G., & English, L. (2020). Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM*, *52*(4), 663–676. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01147-9

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). TIMSS 2011 International Results in Mathematics. I *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. https://eric.ed.gov/?id=ed544554

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52.

Niemi, D. (1996). Assessing conceptual understanding in mathematics: Representations, problem solutions, justifications, and explanations. *The Journal of Educational Research*, 351–363. https://doi.org/10.1080/00220671.1996.9941339

Olanoff, D., Lo, J.-J., & Tobias, J. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: A focus on fractions. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(2), 267–310.

Park, J.-H., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive development*, *16*(3), 763–773.

Prytz, J. (2023a). *En ny kursplan i matematik – hur den skulle kunna se ut och varför* (s. 1–48). Svenskt Näringsliv. https://www.svensktnaringsliv.se/bilder_och_dokument/rapporter/3n0ivy_en_ny_kursplan_i_matematik__johan_prytz_nov_2023_webpdf_1205140.html/En_ny_kursplan_i_matematik__Johan_Prytz_nov_2023_web.pdf

Prytz, J. (2023b). *Grundskolans kursplaner i matematik – igår, idag och imorgon* (s. 1–30). Svenskt Näringsliv.

Prytz, J., Ahl, L. M., & Jankvist, U. T. (2022a). An Innovation's Path to Mathematics Textbooks: A Retrospective Analysis of the Successful Scaling of the Swedish PUMP Project. *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, *2*(2), 241–288. https://doi.org/10.1163/26670127-bja10005

Prytz, J., Ahl, L. M., & Jankvist, U. T. (2022b). What is a successful implementation in mathematics education? On sustainable innovations and the role of textbooks. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 257–277.

Radford, L. (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(6), 1151–1167.

Schwartz, J. L., Hiebert, J., & Behr, M. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. I *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, s. 41–52). Lawrence Erlbaum Associate.

Semadeni, Z. (1984). A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(4), 379–395.

Shield, M., & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 183–199.

Skolverket. (1997). *Kommentar till grundskolans kursplan och betygskriterieri matematik*. Skolverket.

Son, J.-W., & Lee, J.-E. (2016). Pre-service Teachers' Understanding of Fraction Multiplication, Representational Knowledge, and Computational Skills. *Mathematics Teacher Education and Development*, *18*(2), 5–28.

Säfström, A., Helenius, O., & Ahl, L. (2019). Implementing alternative models for introducing multiplication. I U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Red.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Nummer 14, s. 4447–4454). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; Utrecht University; ERME. https://hal.science/hal-02429789/document

Taylor, A., & Jones, G. (2009). Proportional Reasoning Ability and Concepts of Scale: Surface area to volume relationships in science. *International Journal of Science Education*, *31*(9), 1231–1247. https://doi.org/10.1080/09500690802017545

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. I J. Kilpatrick, G. W. Martin, & D. Schifter (Red.), *Research companion to the principles and standards for school mathematics* (s. 95–113). NCTM.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for research in Mathematics Education*, *31*(1), 5–25.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and instruction*, *23*(1), 57–86.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: Some Theoretical and Methodological Issues. *For the Learning of Mathematics*, *3*(2), 31–41. JSTOR.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. I R. A. Lesh & M. Landau, *Acquisition of mathematics concepts and processes* (s. 127–184). London Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. I J. Hiebert & M. Behr, *Number concepts and operations in the middle grades* (s. 141–161). National Council of Teachers of Mathematics.

Zhang, X., Clements, M. A., & Ellerton, N. F. (2015). Conceptual mis (understandings) of fractions: From area models to multiple embodiments. *Mathematics Education Research Journal*, *27*, 233–261.

Om författarna

Ola Helenius är professor i ämnesdidaktik med inriktning mot matematik vid institutionen för didaktik och pedagogisk profession vid Göteborgs universitet där han arbetar med undervisningsutveckling. Han har bland annat lett utvecklingen av undervisningsmodellen Tänka, resonera och räkna (TRR).

Linda Marie Ahl har doktorerat i matematikämnets didaktik och forskar om implementering av innovationer för undervisningsförbättringar vid Institutionen för pedagogik, didaktik och utbildningsstudier, Uppsala universitet. Hon har 20 års erfarenhet av undervisning av matematik på grundläggande och gymnasienivå, bland annat inom Kriminalvårdens vuxenutbildning.

Författare: Ola Helenius och Linda Marie Ahl

Näringslivets skolforum
SWEDISH ENTERPRISE SCHOOL FORUM

svensktnaringsliv.se/skolforum