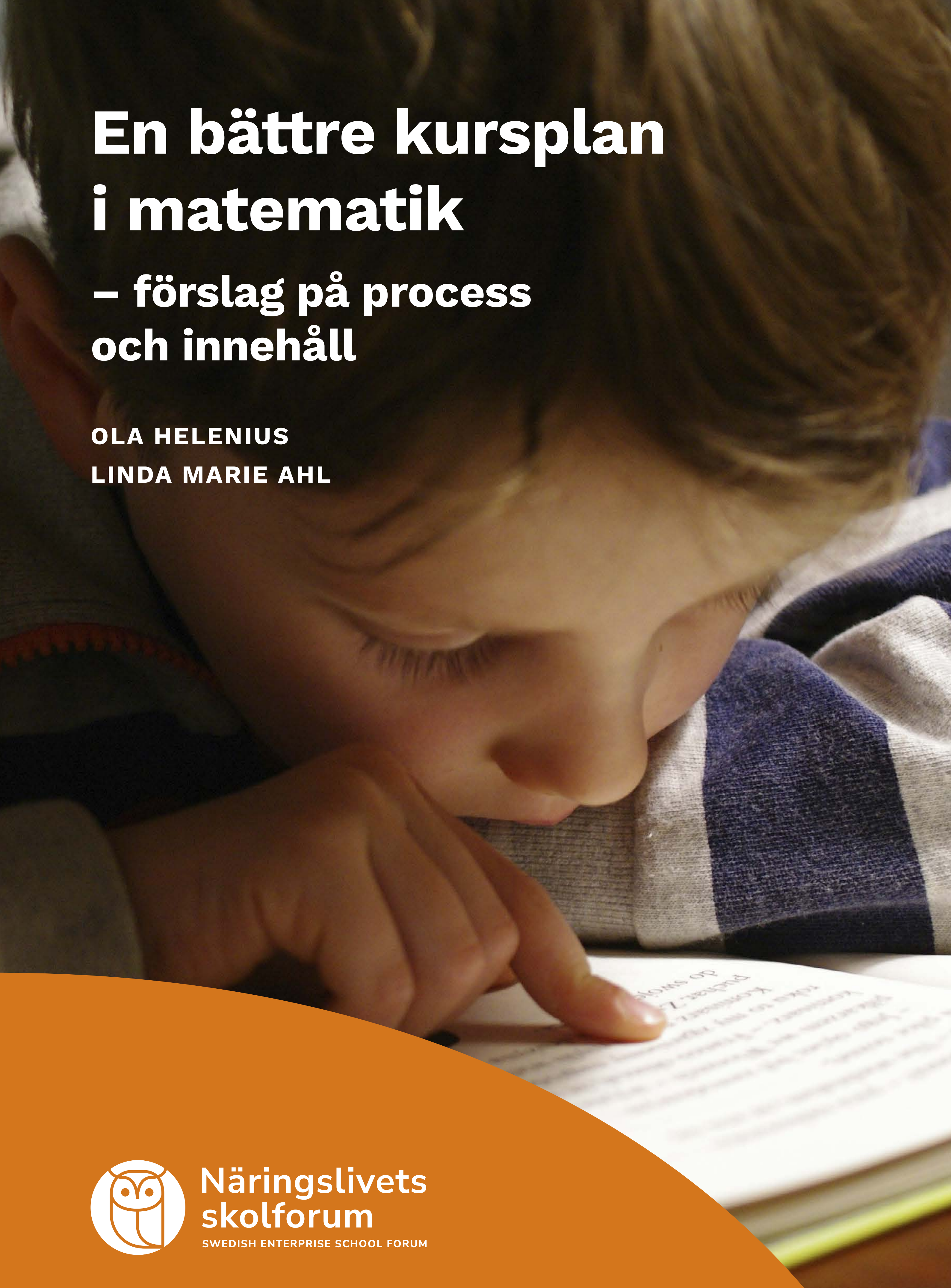
En bättre kursplan i matematik

– förslag på process och innehåll

OLA HELENIUS
LINDA MARIE AHL



Näringslivets skolforum
SWEDISH ENTERPRISE SCHOOL FORUM

En bättre kursplan i matematik
Författare: Ola Helenius och Linda Marie Ahl
April 2024
Näringslivets skolforum, Stockholm
Foto omslag: Michal Parzuchowski, Unsplash

Innehållsförteckning

Näringslivets skolforum är ett initiativ från Svenskt Näringsliv för att stärka Sveriges kompetensförsörjning och förbättra kunskapsresultaten i svensk skola. Syftet är att erbjuda en arena för ökad probleminsikt, förutsättningslös dialog, internationell utblick och erfarenhetsutbyte.

Sammanfattning

Kursplanen i matematik är en bilaga till grundskolans läroplan. Regeringen har tillsatt en utredning som ska se över både läro- och kursplaner i syfte att göra dessa mer tydligt inriktade på fakta och ämneskunskaper samt bättre anpassade efter barns kognitiva utveckling. I de nya läro- och kursplanerna ska utgångpunkten vara ämnets karaktär och vad som är central kunskap i just det ämnet. I ämnena svenska och matematik är till exempel färdigheter i att läsa och skriva respektive räkna grundläggande ämneskunskaper medan fokus i de praktisk-estetiska ämnena bör ligga på praktiska och hantverksmässiga färdigheter och förmågor, snarare än på analyser och reflektion.

I både denna och i tidigare rapporter argumenterar vi för skäl att göra kursplanen i matematik mer specifik. I denna rapport ger vi vår syn på hur ett sådant arbete kan genomföras. Vi menar – i liket med läroplansutredningens direktiv – att det är viktigt att öka snarare än minska ämnesspecificiteten i kursplaner. Vi menar att en ökad specifikationsgrad och ett ökat kunskapsfokus kräver ämnesspecifika överväganden för varje ämne, men inte minst i matematikkursplanen. Vi ser dock en risk att formkrav och andra begräsningar riskerar att släta ut skarpa formuleringar och tydliga kunskapskrav. För att säkerställa att varje ämne får tillräckligt tydligt och ämnesrikt innehåll med lämplig progression föreslår vi att man inleder arbetet med att först skriva ett kommentarmaterial.

Ett sådant kommentarmaterial för ett ökat kunskapsfokus kan tas fram av expertis utan särskild hänsyn till andra ämnen med andra kunskapstraditioner och annan ämnesdidaktisk bas. Ur ett sådant dokument kan sedan kursplanetext i lämplig form tas fram. Kommentarmaterialet kan sedan fungera som en bakgrundstext och ett förarbete som i olika sammanhang kan användas som stöd.

Att skriva ett fullständigt sådant kommentarmaterial ligger utanför ramarna för denna rapport. Vi föreslår i stället en övergripande struktur samt ger exempel inom några valda matematiska innehållsområden på hur kommentarmaterialet kan se ut. Inom dessa områden ger vi även förslag på hur en mer tydlig kursplanetext kan se ut.

En övergripande princip för vår föreslagna kommentarmaterialstext är att den är skriven på en hög professionell nivå då den i första hand riktar sig just till lärare i ämnet samt till andra professionella som läromedelsförfattare och lärarutbildare. Genom en utvecklad och resonerande text med konkreta exempel (inklusive rekommenderade matematiska representationer) och tydlig sekvensering av det matematiska innehållet menar vi att ett kommentarmaterial med tillhörande kursplan har goda möjligheter att utveckla och förbättra svensk matematikundervisning.

Denna rapport är strukturerad på följande sätt:

Del I beskriver övergripande vad vi vill föra fram för en ny kursplan i matematik. Men framför allt vill vi förklara varför det är rationellt att skriva ett kommentarmaterial före kursplanen och vilka överväganden som bör göras om kommentarmaterialets innehåll och form. Vårt förslag bygger på att grundskolans kursplan i matematik huvudsakligen delas in i fyra kunskapsområden:

1. Aritmetik och algebra

2. Funktioner, samband och algebra

3. Geometri och mätning

4. Sannolikhet och Statistik

Som vi konstaterat ligger uppgiften att lämna förslag inom samtliga områden utanför ramarna för denna rapport. I del II gör vi dock ett försöka att visa hur ett kommentarmaterial skulle kunna se ut inom några betydelsefulla delar av det som eleverna på grundskolan verkligen behöver behärska. Vi lämnar också några konkreta förslag på hur det centrala innehållet i en ny kursplan i matematik för grundskolan skulle kunna formuleras inom dessa delområden.

I den avslutande del 3 presenterar vi en möjlig disposition för ett mer tydligt kommentarmaterial som grund för en ny kursplan i matematik. Vi är väl medvetna om att en ny kursplan med tillhörande kommentarmaterial är ett stort och viktigt arbete och gör inte anspråk på att ha några färdiga lösningar. Vi vill i stället visa på hur graden av tydlighet och hur progressionen kan förbättras. Det är konstruerat som ett fullständigt strukturförslag, det vill säga vilka rubriknivåer som vi menar ska ingå medan vårt fördjupade förslag under del 2 kan fungera som diskussionsunderlag om förtjänsterna med att ta först ta fram ett tydligt kommentarmaterial och en därur framtagen möjlig kursplanetext.

Del I – Principer för en ny kursplan

Inledning

I föreliggande rapport diskuteras en ny kursplan i matematik för grundskolan. Det viktigaste budskapet i rapporten handlar om processen att ta fram en kursplan. Själva kursplanen är ett juridiskt dokument vars form är hårt reglerad av olika ramfaktorer. Kursplanen finns som en del av eller bilaga till en läroplan, så språk och innehåll i kursplanen kan behöva anpassas till läroplanen som helhet. Kursplanen i matematik finns också i ett sammanhang med andra ämnen, och hur kursplanen i matematik skrivs kan därför behöva anpassas till en mer eller mindre generell kursplaneram. Kursplanen är också ett juridiskt dokument och kan därför behöva anpassas till särskilda krav på precision och tolkningsbarhet.

I alla de tre föregående meningarna används uttrycket *kan behöva anpassas*. I vilken grad sådan anpassning ska ske är i sig ett viktigt vägval. Man kan se sådan anpassning som en slags homogenisering, där skillnader mellan skolämnen i hur man ska skriva fram kursplanens innehåll utjämnas. I de senaste kursplanerevisionerna har detta homogeniseringstryck varit starkt (Helenius & Ahl, 2023; Prytz, 2023b). 2011 års läroplan med tillhörande kursplan i matematik föregicks av utredningen *Tydliga mål och kunskapskrav i grundskolan* (Utbildningsdepartementet, 2007) där det fanns explicita förslag på tydliga kursplaneskrivningar, en tydlighet som dock kom att tonas ned avsevärt i den slutgiltiga kursplanen (Helenius & Ahl, 2023). Det finns också värdefulla beskrivningar från personer som varit involverade i tidigare kursplaneprocesser som illustrerar hur detta homogeniseringstryck skapar svårigheter i själva kursplanearbetet och rent av gör att ingen faktiskt vet vad det som står i den slutgiltiga kursplanen faktiskt ska betyda (Jahnke, 2014, 2016). Kompromisserna har skett på textnivå utan föregående överenskommelser om vad textens bokstav ska beteckna. Att kursplaner i olika ämnen anpassas till varandra och till en gemensam ram innebär med nödvändighet att olika ämnestraditioner och tillhörande professionellt ämnesspråk tonas ned. Utan tvekan har det skett vid de senaste kursplanerevisionerna när det gäller matematikämnet, och i en internationell jämförelse står den svenska kursplanen i matematik ut som särskilt fattig på ämnesspråk. Tydliga beskrivningar av vad som faktiskt ska läras ut saknas (Prytz, 2023b, 2023a).

Diskussioner om homogenisering mellan ämnen hänger också ihop med diskussionen om vilken kunskapssyn skolans läroplan över lag, och i förlängningen undervisningen, ska förmedla. Vi menar att närhelst en sådan diskussion sker på ett ämnesövergripande plan är risken att den kunskapssyn som mejslas fram fungerar dämpande på undervisning av specifika ämneskunskaper. Vi menar att det i olika ämnen finns olika kunskapstraditioner och att vad som till exempel är fakta och färdigheter inom ett särskilt ämne är något som hör den särskilda ämnestraditionen till. I matematik, som är ämnet för denna rapport, finns en mycket utvecklad sådan tradition.

Låt kommentarmaterial konstrueras först

I den här rapporten kommer vi att behandla frågan om hur en kursplan i matematik kan konstrueras tillsammans med frågan om ett så kallat kommentarmaterial. Inom svensk skolstyrning finns en lång tradition att inte bara förlita sig på de strikt reglerade texterna, som till exempel skollag och läroplan, utan även på diverse typer av stödjande texter som kan gå under benämningar som allmänna råd, rekommendationer, bedömningsstöd och kommentarmaterial samt inte minst läromedel. Stöd för tolkning av läro- och kursplaner har vanligen kallats kommentarmaterial och det är termen vi kommer att använda. Frågan om kommentarmaterialets relation till läromedel och läromedelsproduktion är central för denna rapport. Ett kommentarmaterial är vanligen en längre och mer utvecklad text än kursplanen som motiverar, utvecklar och förklarar kursplanens skrivningar. I Davidssons utredning som föregick 2011 års läroplan och tillhörande kursplaner diskuteras den viktiga roll ett kommentarmaterial har, men också att olika existerande kommentarmaterial inte alltid säger särskilt mycket mer än det styrdokument som kommentarmaterialet ska förklara (Utbildningsdepartementet, 2007). Det menar vi i mycket hög grad gäller dagens kursplan i matematik och tillhörande kommentarmaterial och vi menar att ett skäl till det kan vara att de som skriver kommentarmaterialet inte vågar ta ut svängarna eftersom de inte vill riskera att göra tolkningar av själva kursplan som kanske inte har stöd[1]. Vi föreslår i denna rapport att kommentarmaterial för olika kursplaner, och då särskilt till kursplanen i matematik tas fram före kursplanen och får en roll motsvarande det som förarbeten har inom juridiken och att kursplanetexten sedan härleds ur kommentarmaterialet.

Att göra på det sättet är inte helt oprövat. När förskolans läroplan Lpfö 98 skulle revideras togs först ett förslag fram av Skolverket som efter en hearing på utbildningsdepartementet skrotades. Istället togs ett nytt förslag fram av en grupp på utbildningsdepartementet, ihop med en extern referensgrupp. I det arbetet konstruerades först en bakgrundstext som senare publicerades under titeln *Förskola i utveckling* (Regeringskansliet, 2010). Som jämförelse kan sägas att medan de skrivningar som berör matematik i själva den färdiga reviderade versionen av förskolans läroplan (lpfö98 rev 2010) utgörs av 72 ord, så är den förklarande och motiverande texten om matematik i *Förskola i utveckling* över 2000 ord och tar bland annat upp flera perspektiv som motiverat olika utvecklingsarbeten inom förskolans matematik (Johansson, 2015; Ullsten Granlund, 2019) och överlag erbjuder viktiga tolkningsramar för kursplanetexten och sätt att arbeta med förskolans matematik.

I relation till vår inledande diskussion om homogeniseringstryck, erbjuder valet att ta fram ett kommentarmaterial först flera förtjänster. För det första behöver inte kommentarmaterial för olika ämnen i särskilt hög grad vara lika varandra. Ämnesexperter kan ta fram utgångspunkter för ämnets undervisning fritt och formulera sig i linje med ämnets traditioner utan att i särskilt hög grad snegla på hur kommentarer för andra ämnen ser ut. Om man i ett senare skede vill göra själva kursplanetexterna relativt lika, kan det göras i en slags reduktions- och koncentrationsprocess, med kommentarmaterialet som utgångspunkt. Om man från formellt håll framhåller det underliggande kommentarmaterialet som styrande och stödjande har man då ett dokumentsystem som både kan vara homogent och ämnesspecifikt.

1 Personer involverade i produktionen av det senaste kommentarmaterialet har muntligt för oss bekräftat denna bild.

Utgångspunkter för förändringar

De viktigaste utgångspunkterna för förändringar av kursplanen har presenterats i ett antal rapporter som föregår denna rapport. Dels finns det indikationer på att när svenska kursplaner har varit tydligare inom ett särskilt innehållsområde (aritmetik) så har resultaten för detta innehållsområde förbättrats, medan resultaten för innehållsområden som har varit svagare beskrivna (algebra) har försämrats. En mekanism för detta var troligen läromedel (Prytz, 2023b). Läromedel är en minst sagt aktuell fråga. Både den förra och den nuvarande regeringen har visat stort intresse för läromedelsfrågan. Den förra tillsatte en utredning[2] och den nuvarande har tagit beslut om ett särskilt läromedelsstöd[3]. Ett generellt argument i diskussionen är att lärare, skolor och skolhuvudmän i för hög grad undviker att använda traditionella läromedel. I relation till matematikämnet har dock diskussionen länge varit en annan, nämligen att svenska lärare i för hög grad är beroende, eller kanske rent av styrda, av läroboken. Det finns data som visar att svenska matematiklärare använder läroboken mer än lärare i de flesta andra länder (Mullis m.fl., 2012). Det betyder att det är rimligt att anta att det som står i läroböcker i matematik i hög grad påverkar vad eleverna får möjlighet att lära sig. Det finns mycket goda skäl att tro att läromedelsproducenter är måna om att följa kursplanerna. Det har dock visat sig att det arbete läromedel kan göra i en förändringsprocess i hög grad beror på vad man vill förändra. I en tidigare rapport beskrev vi att den typ av mål som har präglat svenska matematikkursplaner sedan 90-talet har svårt att slå igenom i den praktiska undervisningen (Boesen m.fl., 2014; Helenius & Ahl, 2023). Det handlar till exempel om förmågor som problemlösning som – trots att begreppet har funnits i kursplaner i decennier – fortfarande förekommer sparsamt i läromedel (Jäder m.fl., 2020). Det innebär att bara en väldigt liten del av elevernas arbete handlar om problemlösning i den meningen att eleverna måste utföra kreativt matematiskt grundade resonemang snarare än att imitera andra lösningar (Jäder, 2022). Internationell forskning har dessutom visat att även i sådana fall där läromedel designas för att hjälpa lärare att iscensätta kognitivt utmanande undervisning så finns många skäl till den verkliga undervisningen inte blir sådan som läromedelsutvecklarna tänkte sig (Charalambous & Philippou, 2010; Tekkumru-Kisa m.fl., 2020).

Eftersom förändringar som rör det matematiska innehållet i kursplaner, till skillnad från förändringar som kan sägas handla om undervisningskulturen i stort, har visat sig både kunna påverka läroböcker och undervisningen (Prytz, 2023b; Prytz m.fl., 2022), så menar vi att en kursplan och tillhörande kommentarmaterial som i högre grad specificerar det matematisk innehållet är att föredra. Ett ytterligare skäl för att rekommendera en kursplan med mer specificerat matematiskt innehåll är att det finns en stor mängd forskning med olika rekommendationer om hur visst innehåll bör undervisas. Som vi har visat i en tidigare rapport beaktas i stort inte sådan forskning när det gäller hur läromedel behandlar centralt matematiskt innehåll som bråk, multiplikation, proportionella resonemang och algebra (Helenius & Ahl, 2024b). Ett kommentarmaterial bör därför särskilt noga beskriva ett sätt att behandla det matematiska innehållet som ligger i linje med existerande forskning för att kunna inspirera läromedelsproducenter.

2 https://www.regeringen.se/rattsliga-dokument/statens-offentliga-utredningar/2021/08/sou-202170/
3 https://www.regeringen.se/pressmeddelanden/2024/02/regeringen-avsatter-658-miljoner-for-inkop-av-larobocker/

Förslag på struktur och innehåll för kommentarmaterial

En utgångspunkt för strukturen av innehållet i kommentarmaterialet är att det behöver vara välstrukturerat och anpassat för den tilltänkta läsaren. Den tilltänkta läsaren är lärare, läromedelsförfattare och designers av övrigt undervisnings- och testmaterial, som till exempel designers av nationella prov. Om materialet ska hålla hög kvalitet vad gäller ämnes- och undervisningsdidaktiska riktlinjer kan det inte skrivas med ambitionen att lekmän, föräldrar och elever ska kunna förstå materialet utan specialkunskaper. Vi ser att det är lärarnas och läromedelsförfattarnas roll att mediera mellan kurplanedokument och övriga intressenter. För nuvarande kursplanedokument har läromedelsförfattarna i princip tolkningsföreträde över vad som skrivs i kursplanen. Det vill vi ändra på. Läromedelsförfattarna bör få mycket tydligare instruktioner för innehåll och progression genom ett kommentarmaterial som publiceras före kursplanen. Dessutom bör kommentarmaterialet vara skrivet enligt principer för lärande texter, för att skapa ett dokument som lärarna själva kan vända sig till för att få stöd i att fatta beslut om sin egen undervisning. Kommentarmaterialet bör också vara så omfattande och uppdaterat att det kan användas som utgångspunkt för lärarutbildning och vara med och styra lärarutbildningens innehåll.

En tydlig struktur av innehållet

Läroplaner är juridiska dokument som omgärdas av ett regelverk över hur formuleringar får skrivas. Detta gäller inte kommentarmaterial. När vi beskriver övergripande struktur och innehåll utgår vi från hur texten i kommentarmaterialet kan designas.

Kommentarmaterialets innehåll designat som en text för lärande

Det finns ett väletablerat forskningsfält som ägnar sig åt så kallat lärande undervisningsmaterial (Ball & Cohen, 1996; Davis m.fl., 2014, 2017; Davis & Krajcik, 2005). Vi menar att forskningen om lärande undervisningsmaterial kan användas i designen av kommentarmaterialet med avsikt att få det att fungera som en källa till kunskap både för lärare och läromedelsförfattare. Vi förhåller oss i vårt förslag till fem riktlinjer för hur man utformar lärande texter (Ball & Cohen, 1996; Davis & Krajcik, 2005; Hemmi m.fl., 2013).

1. Den första riktlinjen handlar om allmän kunskap om elevers strategier och idéer och förslag till hur dessa kan bemötas i undervisningen. Här handlar det om kunskap från forskning om vad som orsakar elevernas föreställningar om matematiska begrepp samt exempel på vanliga felstrategier hos elever. I vår förra rapport (Helenius & Ahl, 2023) redogjorde vi mer noggrant än i denna för vilka kunskaper från forskning som finns om elevers missuppfattningar och felstrategier. Den här aspekten behandlas även i vår föreslagna kommentarmaterialstext men det finns utrymme att överväga att låta den ta ännu större utrymme.

2. Den andra riktlinjen handlar om begrepp och fakta. Vi använder genomgående en korrekt terminologi anpassad till att kunna förmedla specifika matematiska och matematikdidaktiska fenomen. Vikten av korrekt terminologi har uppmärksammats i tidigare rapporter av Prytz (2023a, 2023b) och Helenius och Ahl (2023, 2024b).

3. Den tredje riktlinjen handlar om progression och samband. Vi visar i vårt exempel om proportionella resonemang hur en sådan progression i elevernas begreppsförståelse kan beskrivas i kommentarmaterialet till kursplanen. Såväl progressionen genom skolår som sambanden mellan de matematiska idéer som återkommer i flera matematiska områden. Vi skiljer på när ett matematiskt innehåll ska behandlas och när eleverna förväntas behärska innehållet.

4. Den fjärde riktlinjen handlar om att etablera bryggor mellan teori och praktik. Den syftar till att stödja lärares autonomi att planera genom att knyta teori till praktik genom att synliggöra centrala idéer i läroplanen, vilket är syftet med kommentarmaterialet.

5. Den sista punkten som handlar om undervisningsdesign har vi valt att inte beakta. Vi anser att läroplaner och kommentarmaterial ska styra innehållet i undervisningen men inte lärares design av undervisningen.

Kommentarmaterialets struktur

Kommentarmaterialets struktur är en viktig komponent för användarvänligheten. Vi föreslår en tydlig struktur av tre lingvistiska *metafunktioner*, den textuella, den ideationella och den interpersonella (Halliday, 2014).

Den *textuella funktionen* utgörs av rubriknivåer som gör att läsaren snabbt kan hitta de avsnitt som intresserar henne.

De *ideationella funktionerna* består av de bärande idéer som kommentarmaterialet vill förmedla, det vill säga de matematiska ideerna i respektive avsnitt. Eftersom dessa bärande idéer är av specifik matematisk och didaktisk natur behöver språket vara precist och ämnesspecifikt.

Den *interpersonella funktionen* utgörs av tilltalet i kommentarmaterialet. För de avsnitt som beskriver innehållet i undervisningen alterneras det mellan imperativet *ska* och det mjukare *bör*. Skrivningar som undervisningen *ska* behandla och eleverna *ska* behärska används flitigt, särskilt i sådana fall där vi menar att det finns solid forskning för sätt att organisera undervisningsinnehållet som faktiskt är bättre. Anslaget är valt för att det inte ska uppstå några oklarheter för läromedelsförfattare och lärare i fråga om det går att göra lite friare tolkningar av innehållet än vad som är skrivet för sådant innehåll. Vi menar att det är viktigt att både läromedelsförfattare och lärare vågar lita på att de gör rätt när de strukturerar om innehåll i läromedel och undervisning efter beskrivningarna av progressionslinjerna i kommentarmaterialet. När vi sedan exemplifierar de matematiska innehållet signalerar vi att här finns det större frihet för läromedelsförfattare och lärare att välja uppgifter och problem att inkludera i läromedel och att organisera undervisningen runt. Typer av uppgifter och problem, svårighetsgrad och vilka modeller som ska stödjas av uppgifterna och problemen beskrivs. Men läromedelsförfattare och lärare behöver inte välja just de uppgifterna och problemen så länge de uppgifter och problem de väljer vilar på de matematiska idéer som enligt kommentarmaterial och kursplan ska behandlas i undervisningen.

Om vårt förslag

Att presentera ett fullständigt förslag på kursplan och kommentarmaterial överstiger vida vad som kan göras inom denna rapports ramar. Vi kommer därför att nöja oss med att ge ett förslag till vilken struktur ett kommentarmaterial skulle kunna ha samt exemplifiera möjliga skrivningar relaterat till några få innehållsområden. Skälet till att vi som har författat rapporten med en relativt begränsad arbetsinsats kan formulera förslag till kommentermaterialtext, är att vi har valt områden inom vilka vi har stor praktisk erfarenhet, överblick över forskningen samt kunskap om hur praktiskt undervisning vanligen går till (Helenius & Ahl, 2024b). Vi återkommer i slutdiskussionen till vad som skulle krävas för att kunna producera ett fullständigt kommentarmaterial

För att göra det möjligt att inom en snäv tidsram sätta ihop ett förslag har vi fokuserat på matematiska områden där vi är väl insatta i forskningen, hur det ser ut i kursplanen i andra länder samt hur det ser ut i typisk svensk undervisning idag, till exempel som det är representerat i läroböcker. De områden vi inte fokuserar på ger vi bara övergripande strukturförslag för hur innehållet kan presenteras. Vi har också valt att skriva fram innehållet på lite olika sätt för de områden vi har fokuserat på för att göra förslaget till ett ännu bättre diskussionsunderlag för hur ett kommentarmaterial som tas fram före eller i samband med att kursplanen tas fram kan se ut. Rent konkret är de områden som beskrivs under *Aritmetik och algebra* strukturerade som en omfattande bakgrundsbeskrivning om generella progressionslinjer och föredragna sätt att presentera innehållet följt av en relativt summarisk beskrivning av exakt hur sekvenseringen ska göras över de olika stadierna. Inom området *Funktioner, samband och algebra* för delområdet *proportionella resonemang* är det i stället en kortare övergripande text följt av fylliga beskrivningar av vad som ska behandlas och behärskas på respektive stadie.

I denna version av kommentarmaterialsförslaget har vi inga referenser. Som vi beskriver ovan i avsnittet om kursplanens konstruktion är ett föredraget sätt att skapa en utvecklad slutnotsapparat, det vill säga där korta kommentarer om överväganden och forskningsbakgrund inte avbryter kommentarmaterialstexten som sådan utan förflyttas till en särskild plats.

Förmågor och inledande ämnesbeskrivning

Vi föreslår att *förmågebegreppet* ska finnas kvar i kursplanerna i matematik och därmed även i kommentarmaterialet. Vi föreslår att förmågorna ska användas som en huvudsaklig inriktning för undervisning och att kommentarmaterialet ska beskriva varför det är bra att använda sådana förmågebeskrivningar för att beskriva undervisningens föredragna upplägg. Vi föreslår också att det i beskrivningen av de olika innehållsområdena i kommentarmaterialet ska anges hur de olika förmågorna inom just dessa innehåll gestaltas. Detta kan till exempel innebära att beskriva vad det innebär att *förstå* och *kunna använda* begreppet multiplikation på en relativt hög detaljnivå för olika stadier i elevernas begreppsutveckling. Det beskrivs till exempel utförligt vad begreppsförståelse inom det multiplikativa området innebär.

Skolans algebra

Ett av de ställningstaganden som gjorts i denna rapport handlar om skolans *algebra*. Algebra har traditionellt i praktiken handlat om att räkna med bokstäver och i skolan även delvis om att beskriva olika fenomen med hjälp av funktioner och hantera dessa funktioner. I den meningen har ur ett grundskoleperspektiv algebra huvudsakligen varit ett ämne för högstadiet. Men sedan 80-talet har en idé om så kallad *tidig algebra* (eng: early algebra) varit dominant i den matematikdidaktiska forskningen om skolalgebra. Denna idé går huvudsakligen ut på att introducera algebraiska tankesätt så tidigt som möjligt i skolmatematiken, för att dels ge eleverna tillgång till sådana kraftfulla sätt att tänka matematiskt, men också för att göra övergången till formell algebra mindre dramatisk. Svenska elever har traditionellt presterat dåligt på internationella mätningar inom området algebra samtidigt som den svenska skolmatematiktraditionen inte heller har varit särskilt fokuserad på algebra. Trots att man kan se att idéerna om tidig algebra verkar ha påverkat både tidigare kursplaner och utvecklingen av läromedel, så visar granskningar att läromedelsserier inte fullföljer ett tidigt algebraperspektiv och att algebra i senare årskurser blir allt mer av ett eget område, istället för något som används genom hela matematiken (Helenius & Ahl, 2024b, 2024a). I detta material skriver vi därför in algebraiska perspektiv i andra innehållsområden, istället för att ha algebra som ett separat område. Intentionen är att detta ska påverka undervisningen och även läromedel till att dels ta ett mer ordnat perspektiv på den tidiga algebran och dels utnyttja algebra på ett mer integrerat sätt i de senare årskurserna. Vi menar alltså att detta förslag ska göra undervisningen mer algebraisk.

Indelning av det matematiska innehållet

Att skapa en ny indelning av det matematiska centrala innehållet har inte varit ett huvudfokus i skapandet av denna rapport. Som en konsekvens av diskussionen om algebra ovan och diskussionen om förmågor, särskilt problemlösning, är det dock rimligt att se över indelningen av centralt innehåll. Vi föreslår att alla områden ska ha ett specifikt beskrivet algebrebraiskt språk, där särskilt algebraiskt fokus läggs inom områdena aritmetik och Funktioner och samband. Därför låter vi rubriknivån för dessa områden vara *Aritmetik och algebra,* samt *Funktioner, samband och algebra.* Övriga områden har vi valt att ge de preliminära namnen, *Geometri och mätning* samt *Statistik och Sannolikhet.* Vi föreslår alltså att dagens indelning med *Problemlösning* som ett eget avsnitt under centralt innehåll tas bort och istället arbetas in som förmåga och övergripande inriktning för undervisningen i stort. Vi föreslår att det istället skrivs en särskild, utvecklad text om varför man bör organisera undervisningen genom just problemlösning samt hur sådan undervisning kan se ut i praktiken och vilka didaktiska utmaningar det innebär. Vi föreslår också att beteckningen taluppfattning tas bort. Taluppfattning är ju en mänsklig förmåga, medan alla de andra centrala innehållen är matematiska områden. Eftersom aritmetik är den formella termen på det innehåll som har avsetts med rubriken *Taluppfattning och tals användning*, så menar vi att aritmetik är ett bättre namn. Undervisningen i aritmetik ska naturligtvis syfta till att utveckla taluppfattning och förståelse för tals, och operationer på tals, användning i olika sammanhang. Detsamma gäller för de andra områdena. Inom området funktioner förväntas eleverna utveckla funktionsuppfattning, och så vidare.

Bedömning

I vårt förslag har vi inte tagit med någon diskussion om betygskriterier och bedömning. Det beror på att det inte är möjligt att skriva ett sådant område innan det är klarlagt hur framtida betygssystemet och system av bedömningskriterier ska se ut. Frågan om hur betygskriterier ska se ut är dock avgörande. Vi föreslår att det matematiska innehållet specificeras i betydligt högre grad, särskilt i kommentarmaterialet. Att skicka betygskriterier som är listor med allt sådant innehåll är knappast önskvärt. En möjlig skrivning är att som idag ha förmågorna som utgångspunkt, men att tydliga för varje stadie tydligare specificera på vilket sätt och i vilken utsträckning, vissa urval av det centrala innehållet ska bedömas för de olika förmågorna.

Avslutande reflektion

Drivkraften för denna rapport är tesen att en framtida svensk kursplan i matematik i högre grad bör präglas av mer utförliga och precisa beskrivningar med ämnesspecifika uttryck och begrepp i kontrast till nuvarande kursplan (Prytz, 2023a). Med syfte att underlätta för skolans planering och genomförande av matematikundervisning vilande på vetenskaplig grund föreslår vi nu som i den tidigare rapporten (Helenius & Ahl, 2024b):

- Att solida resultat från matematikdidaktisk forskning beaktas i utformandet av kursplaner och kommentarmaterial.
- Att nya kursplaner i matematik föregås av ett kommentarmaterial som konkretiserar innehållet och progression i kursplanen samt redovisar de vetenskapliga didaktiska överväganden som ligger till grund för dessa ställningstaganden.
- Att kommentarmaterialet skrivs för att fungera som ett stöd för både läromedelsförfattare och lärare. Det ska tydligt framgå vilket matematiskt innehåll som ska ingå i undervisningen och i vilken progressionstakt innehållet ska presenteras.

Vi ser en potential i den svenska traditionen där lärarna i stor utsträckning låter planeringen av sin matematikundervisning styras av matematikboken. Vi menar att dagens kursplan som baseras på generiska uttryck och begrepp (Prytz, 2023a) inte ger tillräcklig information till läromedelsförfattare. Bristen på precision har resulterat i att matematikböcker ser ganska olika ut (Helenius & Ahl, 2024b). Vissa elever arbetar med böcker som innehåller mindre utmanande matematik och begränsas därmed i sin kunskapsutveckling. Det menar vi är ett likvärdighetsproblem då lärare tenderar att välja 'lättare' böcker till barn från socioekonomiskt svaga grupper och mer utmanande böcker till barn från socioekonomiskt starka grupper[4]. Därför menar vi att en kursplan med tillhörande kommentarmaterial med utförliga och precisa beskrivningar och med ämnesspecifika uttryck är ett viktigt steg för att ökad likvärdighet i skolan.

En ny kursplan bör behålla de matematiska förmågorna som strukturerar nuvarande kursplan. Dels för att idén om att utveckla matematiska förmågor (som i andra länder ofta kallas kompetenser) är allmänt vedertaget och att lärarna under sedan 1994 har implementerat att bedöma progression i förmågor. Kursplanen bör dock – tillsammans med sitt kommentarmaterial – bli mycket mer konkret och tydligare beskriva hur förmågorna ska tolkas i relation till de olika centrala innehållen. Att göra en kursplan tydligare genom att i högre grad specificera det matematiska innehållet kan ur ett implementeringsperspektiv få starkt genomslag eftersom svenska matematiklärare i hög grad planerar sin undervisning med hjälp av läroboken (Mullis m.fl., 2012). Tydliga signaler till läromedelsförfattare via kommentarmaterialet förväntas ge författarna möjlighet att generera läromedel som tydligt speglar intentionerna i kursplanen.

4 Enligt opublicerade analyser av Kimmo Eriksson baserade på data från TIMSS 2015.

En viktig skillnad mot nuvarande kursplan är att i vårt förslag slås det fast när eleverna ska börja arbeta med ett matematiskt innehåll och när de förväntas kunna ett matematiskt innehåll. Vi har i våra exempel på kommentarmaterial-skrivningar influerats av de singaporianska kursplanerna och den engelska som har långt mer precisa beskrivningar av progression än den nuvarande svenska läroplanen i matematik har (Prytz, 2023a). I vår terminologi har vi inspirerats av uttrycket *mastery* från de Singaporianska kursplanerna och *fluency* från den engelska kursplanen. Vi använder skrivningen att *eleverna ska behärska* för att signalera när kunskaper ska vara uppnådda med säkerhet i användandet.

Avslutningsvis vill vi föreslå hur arbetet för en ny kursplan skulle kunna se ut och vilka som kan göra arbetet. Om vi utgår från den här texten så är den sammanställd under en period på två månader då vi samtidigt har haft fullt upp med vår ordinarie forskning och undervisning. Att vi kan sätta ihop en som vi menar komplex text på kort tid beror på att vi redan har läst tillgänglig ämnesdidaktisk forskning, bedrivit egen forskning om begreppsbildning, tänkt alla tankar och prövat dem i undervisningskontext inom de områden vi har valt att skriva om. Vi har i denna rapport huvudsakligen berört det matematiska innehållet tal, multiplikation, algebra och proportionella resonemang. För att ta fram ett heltäckande kommentarmaterial behövs till exempel även forskare och lärare som är experter på geometri, sannolikhetslära och statistik. Materialet behöver även förfinas, kompletteras och övergripande texter om skolämnets särskilda undervisningskaraktär ska skrivas. Dessutom behöver texterna prövas ut tillsammans med grupper av lärare. Vi menar dock att ett sådant arbete bör kunna genomföras på ca 6–12 månader om man forcerar processen maximalt. Därefter kan man arbeta med frågan om själva kursplanens formulering. Vi menar att själva det faktum att kommentarmaterialet är en mindre formell text med lägre grad av styrande funktion gör att den kan tas fram snabbare. Det är också möjligt att i efterhand ta fram kompletteringar och justeringar utan att ändra kursplanen. Ett sådant förfarande skulle kunna bidra till ett mer flexibelt styrsystem för skolans matematikundervisning.

Vårt förslag till struktur på ett nytt kommentar-material presenteras i del II men föreslås alltså bestå av följande sju kapitel:

1. Inledning
2. Grundskolans årskurser
3. Aritmetik och algebra
4. Funktioner, samband och algebra
5. Geometri och mätning
6. Sannolikhet och statistik
7. Avslutande kommentarer och förslag till fördjupning

I del II presenterar vi dock fördjupade förslag huvudsakligen inom tre av dessa tänkta kapitel: G*rundskolans årskurser, Aritmetik och algebra* respektive *Funktioner, samband och* algebra. I dessa avsnitt presenterar vi förslag till texter som vi ser som rimliga utkast för hur dessa avsnitt bör utformas. På liknande sätt skulle vi och andra forskare kunna fortsätta fylla på med liknande texter och exempel inom de övriga kapitlen som tillsammans skulle kunna utgöra ett riktigt tydligt, forskningsgrundat och didaktiskt väl utformat kommentarmaterial för alla relevanta områden som behöver ingå i grundskolans kursplan i matematik.

Del II – Fördjupning kring kommentarmaterialets utformning

Inledning

I föregående del gav vi förslag på att ett kommentarmaterial kan ha följande rubrikindelning:

1. Inledning
2. Grundskolans årskurser
3. Aritmetik och algebra
4. Funktioner, samband och algebra
5. Geometri och mätning
6. Sannolikhet och statistik
7. Avslutande kommentarer och förslag till fördjupning

För att ytterligare kunna kommunicera på vilken detaljnivå vi tänker oss att ett kommentarmaterial skrivs ger vi i denna del av rapporten ett förslag på utvecklad rubrikstruktur, följt av fem exempel på hur konkreta avsnitt kan skrivas.

Förslag på utvecklad rubrikstruktur

1. Inledning
    1.1. Om kommentarmaterialets struktur och hur det är tänkt att kunna användas
    1.2. Om matematikens roll i skolan och ämnets särart som undervisningsämne
    1.3. Om positioneringen av förmågor som guidande för undervisningens inriktning
    1.4. Om algebra som ett övergripande perspektiv
2. Grundskolans årskurser
    2.1. Förskoleklassens matematik
    2.2. Matematiken i årskurs 1–3
    2.3. Matematiken i årskurs 4–6
    2.4. Matematiken i årskurs 7–9
3. Aritmetik och algebra
    3.1. Tal
        3.1.1. Talmängder
        3.1.2. Tals storlek
        3.1.3. Representationer av tal
            Ikoniska representationer
            Positionssystemet
            Tallinjen
            Bråksystemet
            Några andra representationer
    3.2. Additiva strukturer
        3.2.1. Innebörden av addition och subtraktion och de olika additiva situationerna
        3.2.2. Representationer av addition och subtraktion med fokus på del-del-helhetsmodeller och tallinjen
        3.2.3. Aritmetiska additiva uttryck och deras samband
        3.2.4. Beräkning av addition och subtraktion
    3.3. Multiplikativa strukturer
        3.3.1. Innebörden av multiplikation och division och multiplikativa situationer och representationer
        3.3.2. Beräkning av multiplikation och division och den distributiva lagen
    3.4. Uttryck, likheter och ekvationer
    3.5. Progression genom grundskolans stadier inom delområdet aritmetik och algebra
    3.6. Undervisningsexempel
    3.7. Centralt innehåll inom aritmetik och algebra
        3.7.1. Förskoleklass
        3.7.2. Årskurs 1–3

Förslag på text till avsnitt 2: Grundskolans årskurser

2.1 Förskoleklassens matematik

Det är rimligt att ha olika fokus för grundskolans matematikundervisning i skolans olika stadier. Förskoleklassen bör huvudsakligen ägnas åt att begreppsliggöra den grundläggande matematiken och då företrädesvis aritmetiken. Det betyder att skapa en känsla för tal, operationerna *addition* och *subtraktion* och hur de hänger ihop, den vokabulär som vi använder för att beskriva *tal*, det vill säga ord för antal och ordning och den så kallade *talramsan*, samt representationer av tal med *siffror* och till viss del även talraden och *tallinjen*. Även annan matematik kan behandlas, men det övergripande fokuset bör vara på tal, som är den enda delen av matematiken som tenderar att ställa till problem i den senare matematikundervisningen för elever med svårigheter. Undervisningen ska också läggas upp så att elever får möjlighet att arbeta med matematiska problem och delta i lärarledda diskussioner där elever beskriver sina tillvägagångssätt och matematiska funderingar för varandra och tränar sig att lyssna och återkoppla på andras verbalt presenterade matematiska resonemang.

2.2 Matematiken i årskurs 1–3

En stor del av den matematik som formellt introduceras i årskurs 1–3 bildar grund för nästan all annan matematik. Det finns alltså skäl att i de tidigare årskurserna fokusera på aritmetik, men arbeta med relativt få uppgifter och uppgiftstyper, som ska ha rollen att förankra de aritmetiska operationernas sammanhang och koppling till tal snarare än att träna på problemlösning i sig. För området *Aritmetik och algebra* är det i högre grad angivet att elever ska *behärska* olika delar av innehållet än det är i andra områden i 1–3. Det beror på att aritmetiken och den inledande algebran utgör en förutsättning för att kunna följa den kommande matematikundervisningen i mycket högre grad än annat matematiskt innehåll. Det är dock fortfarande viktigt att innehåll från andra områden behandlas och används redan i årskurs 1–3 för att skapa ett rikt underlag att hämta tillämpningar och problemformuleringar från.

2.3 Matematiken i årskurs 4–6

I årskurs 4–6 är det viktigt att bibehålla fokus på aritmetik och algebra och introducera det innehåll som är nytt men också fördjupa kunskaperna inom det som har förankrats i årskurs 1–3. I årskurs 4–6 är det rimligt att särskilt stort fokus går åt till att arbeta med *proportionella resonemang* men även med områden inom *geometri*, *statistik* och *sannolikhet*. Eleverna bör i hög grad träna på att formulera formellt kommunicerade skriftliga lösningar, där kravet på formalitet och läsbarhet gradvis ökar. Ett sådant förfarande stärker fokuset på området samband och funktioner, som nästan alltid är i spel när olika situationer ska matematiseras och beskrivas med matematiskt språk om de matematiska metoder som har använts i lösningen. Ett ökat fokus på funktioner, samband och algebra går därför hand i hand med ett ökat fokus på *matematisk formalism*. Att skriftligt kunna beskriva den matematik man jobbar med är också en viktig förutsättning för att lära sig hantera mer komplexa matematiska problem, till exempel problem i flera steg, där det är svårt att hålla hela lösningsprocessen i huvudet samtidigt. Att tydligt beskriva sina lösningar, inklusive att vara tydlig med hur *variabler* är definierade och vilka *matematiska samband* som används, är i sig ett sätt att kunna hantera en viss problemställning i mer komplexa talområden, eller i algebraiska form.

2.4 Matematiken i årskurs 7–9

Fokus för högstadiets matematikundervisning bör huvudsakligen vara att vidga spektrat av problemställningar som behandlas inom olika matematiska områden, samt öka komplexiteten i de uppgifter som eleverna ska kunna hantera. Allt det som har varit i huvudfokus i de tidigare stadierna måste *kontinuerligt repeteras* i årskurs 7–9. Sådan repetition bör huvudsakligen utgöras av grunderna i aritmetik, funktioner och samband, inklusive de algebraiska komponenterna av dessa områden används i nya sammanhang.

Förslag på text till avsnitt 3 och 3.1

Aritmetiken delas upp i fyra sammanhängande delområden: *Tal*, *Additiva strukturer*, *Multiplikativa strukturer* samt *Uttryck, likheter och ekvationer*. I alla dessa områden finns en algebraisk komponent som handlar om att se, använda och representera struktur. Sådana strukturella komponenter behöver inte bara representeras med bokstavsuttryck utan handlar också om att se och beteckna generella samband. Ett enkelt exempel är att subtraktionen $5-3=\_$ och det öppna additionsuttrycket $3+\_=5$ är två olika sätt att beskriva samma aritmetiska problemställning. Eller allmänt att vilket som helst av uttrycken $a+b=c$, $a=b-c$ och $b=c-a$ är sanna så är också de andra två sanna. På den multiplikativa sidan är motsvarigheten att $3\cdot\_=15$ och $15/3=\_$ är två sätt att formulera samma aritmetiska problem, och allmänt att om om vilket som helst av uttrycken $a\cdot b=c$, $c/a=b$ och $c/b=a$ är sanna så är också de andra två sanna. Den algebraiska komponenten av detta handlar inte i första hand om att kunna producera de algebraiska uttrycken, utan om att förstå sambandet mellan operationer på detta strukturella sätt. En särställning inom området har också den distributiva lagen som kopplar ihop multiplikation och addition.

3.1 Tal

Tal är matematikens mest fundamentala objekt. Väldigt många matematiska egenskaper anges genom att de mäts med tal, som *antal*, *ordningsföljd*, *vinkel*, *längd*, *area* osv. Det gäller även många saker i vardagslivet och inom vetenskap, som *temperatur*, *massa*, *längd*, *ålder*, *tid*, *hastighet* osv. Redan mycket små barn har en uppfattning om antal och under sin uppväxt får de också höra orden vi vanligtvis använder för tal, det vill säga räkneord, i olika kombinationer. De får även se *siffror* som är de symboler som vi typiskt sett använder för att ange tal.

Det finns tre huvudsakliga dimensioner av progression inom området tal: *Talmängder*, *tals storlek* och *representationsformer av tal*.

3.1.1 Talmängder

Den första dimensionen beskriver olika talmängder. Redan när barn börjar skolan har de vanligen en god känsla för de positiva heltalen, det vill säga 1, 2, 3..., som de till exempel använder när de räknar antal eller anger ordning. Senare i skolan lägger man till de *positiva rationella talen* som till exempel tre fjärdedelar eller fem sjundedelar (vi återkommer till diskussion om hur detta kan göras). Därefter kompletterar man vanligen med negativa tal som till exempel –7 och *negativa rationella tal.* Mot slutet av grundskolan får eleverna även en viss kontakt med de *reella talen* men huvudsakligen endast via några specifika reella tal som inte är rationella (till exempel pi) eller via system av reella tal som till exempel roten två, roten ur tre och så vidare. De djupare egenskaperna av rationella tal respektive reella tal behandlas vanligen inte i grundskolan och inte heller den största klassen av tal – de komplexa talen.

3.1.2 Tals storlek

Den andra dimensionen handlar om talens storlek, framförallt när det gäller de positiva heltalen och framför allt när det gäller att utföra aritmetiska operationer på dessa tal. Traditionellt brukar ganska mycket av aritmetikundervisningen struktureras genom att relativt långsamt öka storleken på de tal som elever ska kunna operera med. Men det är antagligen bättre att mycket tidigt, det vill säga från årskurs 1, arbeta med tal upp till 100 eller 1 000 eftersom mycket av den viktiga struktur som eleverna ska vänja sig vid inte uppkommer om man håller sig till små tal under 10 eller 20.

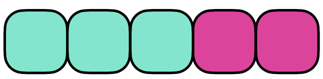
Elever är redan innan skolåldern vanligen bekanta med både små tal, som 1, 2 och 3 och stora tal, som 250 eller 1 999. Kanske i form av priset på någon vara. Den centrala poängen med att ändå arbeta särskilt med små tal i området 1–10 och senare 0–20 handlar om att sådana tal direkt är visualiserbara som mängder av objekt och att den aritmetiska struktur, det vill säga vissa talfakta och tabellkunskaper, som man kan lära in inom detta talområde senare återanvänds vid beräkningar inom större talområden. Kopplingen mellan intuition och visualisering å ena sidan och hur tal kan representeras med matematisk notation, det vill säga siffror och symboler, å andra sidan är enklare att erövra när man arbetar med små tal som det går att ha visuell överblick över.

3.1.3 Representationer av tal

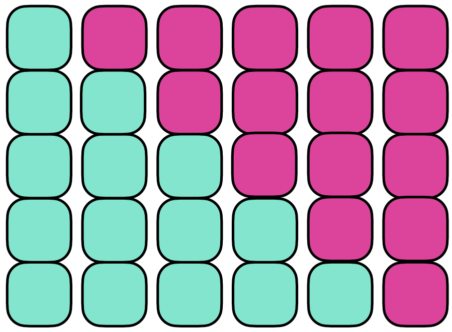
Den tredje dimensionen av progression handlar om vilka representationer som används för att beteckna tal. Nedan beskrivs de viktigaste representationerna.

Ikoniska representationer

Verbalt används ju räkneorden, och även ord för ordning, som första, andra, tredje osv, tidigt i barns utveckling. Men hur betecknas tal? Det vill säga hur kan man visa vilket tal man avser utan att säga det med ord? Till en början kan man säga tal betecknas med det de betecknar vill säga antal saker. Det vill säga när man ska beskriva antalet fem så kanske man visar fem saker eller fem fingrar. Ett liknande sätt att beteckna tal är med ikoniska former, till exempel fem streck för att beteckna fem.



Figur 1. En ikonisk representation av talet fem i form av (en ritad bild av) fem saker som också illustrerar att fem kan byggas av tre och två och att fem kan delas upp i tre och två.



Figur 2. Ikonisk representation av femkamrater, det vill säga olika uppdelningar av talet fem.

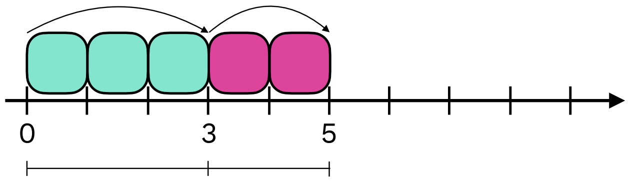
Positionssystemet[5]

Nästa system som dyker upp är vårt tiopositionssystem, det vill säga när vi använder tio siffror 0 till och med 9 och ställer dem i en särskild ordning och där ordningen får betyda något särskilt (13 betyder till exempel 10 + 3). Med hjälp av positionssystemet kan man beskriva hur stora positiva heltal som helst. Lägger man till ett minustecken framför så kan vi också beteckna negativa tal. Genom att lägga till ett decimaltecken och siffror efter, kan vi också beteckna tal mellan heltal, särskilt tal mellan noll och ett, som till exempel 0,5. Positionssystemet är extremt användbart när man vill göra beräkningar med addition och subtraktion. Det finns också en enkel princip för att kunna bestämma hur stora tal och för att avgöra vilket av två tal representerade med positionssystem som är störst.

Tallinjen

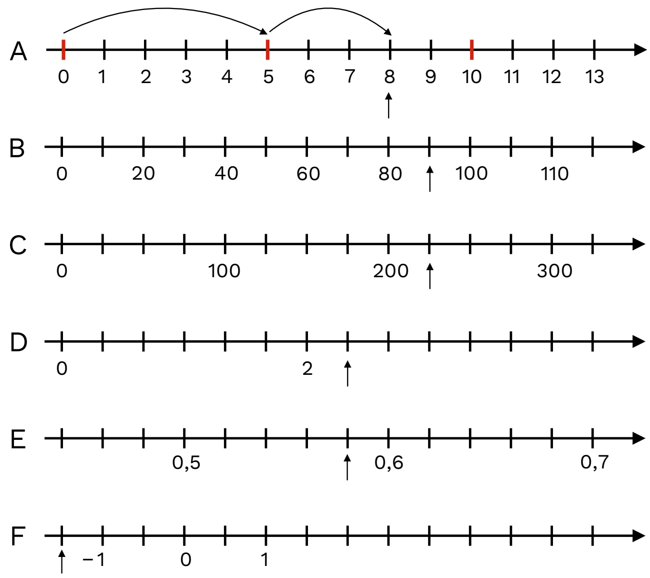
En annan viktig representation att ta med tidigt i utvecklingen är *tallinjen*. Eftersom tallinjen är en viktig representation som inte alltid undervisas på ett sammanhängande sätt så behandlas den noggrant här. Med hjälp av tallinjen kan man beteckna tal med hjälp av positioner, längder och förflyttningar, alltså inte bara antal. Det här sättet att tänka på tal använder en annan del av hjärnan än den som bara kopplar ihop tal med antal, nämligen sådan kognition som har med rumsuppfattning att göra. Därför stärker systematisk användning av tallinjen taluppfattningen.

5 I ett fullständigt kommentarmaterial ska positionssystemet behandlas på ett fylligare sätt, ungefär i samma detaljgrad som tallinjen och bråksystemet nedan.



Figur 3. Tallinjen tillsammans med en ikonisk representation av antal med illustrationer av uppdelning av talet fem. Tallinjen kodar samtidigt tal som positioner, längder och förflyttningar, och ger alltså ihop med antalsstrukturen fyra olika sätt att se på uppdelning av fem i två och tre. Figuren är inte nödvändigtvis särskilt instruktiv för elever, men kan vara förklarande för lärare.

Tallinjen kan också användas för att motivera att det ska finnas tal mellan till exempel fem och sex och att det är själva verket finns hur många sådana tal som helst som kan ligga hur tätt som helst. Se figur 4, tallinje D och E, nedan. Tallinjen är också ett viktigt hjälpmedel för att hantera och förstå olika huvudräkningsstrategier för addition och subtraktion. Då tallinjen används för att introducera bråk, vilket är rekommenderat, så får man på köpet att de tankemodeller som eleverna har utvecklat för att hantera addition och subtraktion fortsätter att fungera när eleverna ska hantera bråk. Tallinjen är ett väldigt flexibelt matematiskt redskap och alla tallinjer bygger på en slags dubbelräkning av avstånd. Vanligen sätter man på tallinjen ut streck med samma avstånd mellan, sedan bestämmer man vad en förflyttning mellan två konsekutiva streck ska vara värt. Detta värde måste sedan vara detsamma för förflyttningar mellan två konsekutiva streck var som helst på tallinjen. Figuren nedan visar fyra exempel, där exempel A visar den enklaste formen av tallinje där varje mellanrum mellan två konsekutiva streck betyder 1.



Figur 4. Tallinjer.

Tallinje A. är användbar för att vänja elever vid tallinjen och tallinjen bygger på positioner, förflyttningar och längder. En fråga som kan ställas vid arbetet med en sådan tallinje är: *Om jag står på 5, hur många steg är det till 8 (3 steg)?* Man kan också arbeta med tals helhet och delar, det vill säga att tal kan dekomponeras och sättas ihop genom att se vägen från 0 till 8 som uppdelat i hoppet 0–5 följt av 5–8, ett fem-hopp och ett tre-hopp. Detta kan senare användas för att dela upp addition av 8 i addition av 5 och 3. Detta leder i sin tur till en beräkningsstrategi där man ser 45+8 som 45+5+3. Först adderas 45+5, vilket är lätt, och sedan 50+3, vilket också är lätt. Tallinjen ger alltså en grundläggande konceptuell struktur för denna typ av viktiga tankemodell.

Tallinjerna B–F har alla egenskapen att avståndet mellan, eller förflyttningen mellan, två skalstreck är något annat än 1. För alla sådana tallinjer måste man alltid fundera ut vad längden, hoppet, förflyttningen, steget etc mellan två streck betyder. Det behövs för att kunna avgöra vilket tal pilarna pekar på för respektive tallinje. För tallinje B är detta relativt enkelt. Man kan "med blotta ögat" se att det är 10, 30, 50 osv som fattas mellan de angivna positionerna och att pilen pekar på 70. För de andra tallinjerna krävs mer avancerade överväganden. För C kanske man ser att positionen mellan 0 och 100 måste vara hälften av 100 det vill säga 50 och att positionen mellan 0 och 50 måste vara hälften av 50, det vill säga 25. Ett hopp mellan två streck är alltså 25. Det behövs aritmetisk kunskap om att 100/5 = 50 och 50/2 = 25 innan man kan hantera denna tallinje och till exempel se att pilen pekar på 25 mer än 200 det vill säga 225.

Tallinjerna D-F kräver förutom aritmetisk kunskap också andra representationer än den som vanligen används för att beteckna positiva heltal. För D kan man kanske se direkt att strecket mitt emellan 0 och 2 måste vara 1. Men sedan är det ju tre hopp från 0 till 1. Man behöver alltså uppfinna tredjedelar för att kunna namnge de olika positionerna och konstatera att ett hopp mellan två streck här ska vara en tredjedel som kan betecknas ⅓, och två sådana hopp är två tredjedelar, eller ⅔. Att namnge eller beteckna positionen som pilen pekar på kan då göras på två sätt, antingen räknar man alla tredjedelar från 0 och får 7/3, eller så ser man att pilen är en tredjedel efter 2 och beskriver det som 2 och ⅓, betecknat som 2⅓. Detta är generellt ett mycket bra sätt att introducera bråk och bråknotationen, som gör att den annars besvärliga övergången från egentliga till oegentliga bråk aldrig behöver uppkomma.

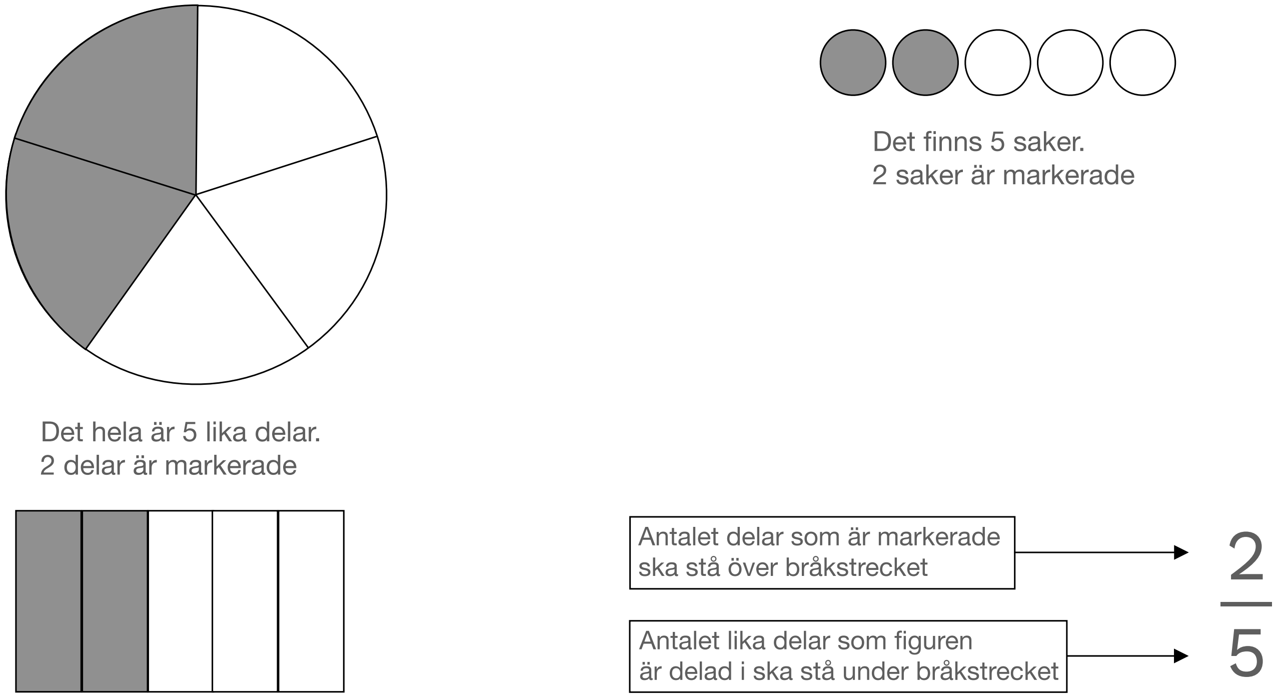
Tallinje D är bara betecknad med heltalen 0 och 2, men är i själva verket en introduktion av bråkbegreppet. Det är för att det i själva verket är 1/3 mellan varje par av två på varandra följande skalstreck. För att kunna säga vilket tal pilen pekar på behöver man alltså tredjedelar och kan antingen säga talet i fråga är 1/3 mer än 2, det vill säga 2 1/3, eller så kan man räkna antalet tredjedelar från 0 och säga att talet är 7/3.

För att hantera tallinje E behöver man vissa kunskaper i decimalsystemet. Det finns ju inget tal på formen 0,S (S en siffra, 0, 1, 2 9) mellan 0,5 och 0,6, utan eleven måste veta att sådana tal måste ha fler decimaler. Ett generellt sätt att hantera frågan är att observera att det är 5 hopp mellan 0,5 och 0,6, det vill säga att varje sådant hopp ska vara värt 0,1/5 = 0,02. Pilen pekar på talet 0,02 före 0,6, det vill säga 0,58.

Tallinje F visar ett exempel på negativa tal, och det är inte ovanligt att introducera negativa tal via tallinjen.

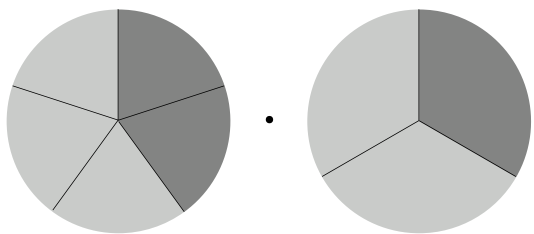
Bråksystemet

En annan mycket central representation för tal är bråkrepresentationen. Bråk introduceras väldigt ofta med hjälp av ikoniska geometriska del-helhetsrepresentationer, som till exempel bråkcirklar samt med del-av-antalsrepresentationer.



Figur 5. Del-helhetsrepresentationer som utgångspunkt för bråk.

Med denna ingång ska antalet lika delar som en figur delas i stå under bråkstrecket och antalet markerade delar stå över bråkstrecket. Denna ingång till bråk är världen över dominerande, men samtidigt är det väldokumenterat att den leder till många missuppfattningar och att den skapar en idé om bråkbegreppet som är svår att utveckla. Bland annat leder detta sätt att hantera bråk till att elever inte uppfattar att bråk är tal och att bråk uttrycker ett multiplikativt förhållande. Bråk uppfattas i stället något helt eget. Det är också vanligt att bråk ses som två tal, i själva verket två antal, och den intuition som elever byggt upp från arbete med heltal motverkar att de utvecklar intuition för att bråk är tal som fungerar som vilka tal som helst. Det är också svårt att förstå vad multiplikation av två bråk skulle betyda om man ser bråkformen som en slags beteckning av en geometrisk figur där vissa delar är utvalda. Vad skulle till exempel "två av fem multiplicerat med en av tre" kunna betyda?

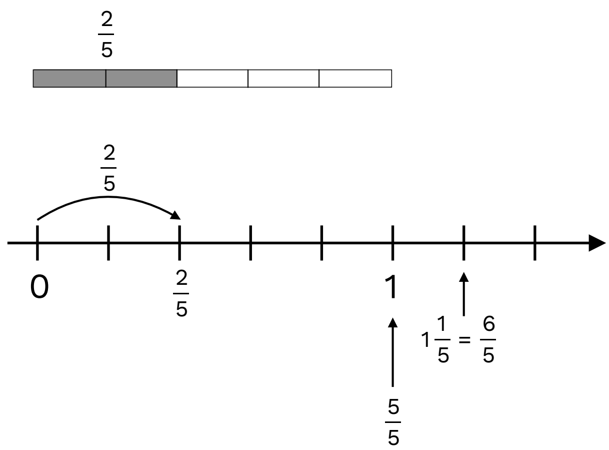


$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = ?$$

Figur 6. Om bråk tolkas som del-helhetsmodeller är det omöjligt att förstå vad multiplikation av två sådana ska kunna betyda.

Ett dilemma för undervisningen är att del-helhetsrepresentationerna är så vanliga och ofta används i tester. Dessutom är del-helhets-representationer enkla att förstå för elever initialt. Men som sagt leder del-helhetsmodellen till problem senare i elevernas kunskaps-utveckling. Ett näraliggande alternativ är att använda del-helhetsrepresentationer i form av längder, särskilt kompletterat med bråk på tal-linjen. Att kunna använda tallinjen när man ska introducera bråk är i själva verket ett viktigt skäl att introducera och arbeta med tallinjen redan i årskurs 1 eller tidigare. Bråk på tallinjen har två centrala fördelar. Dels förmedlar en sådan modell direkt att bråk är tal och att ett visst bråk har en exakt storlek. Med del-helhetsmodeller tenderar en bild av att ett bråk som något relativt att förmedlas. ⅓ av en liten pizza är ju mindre pizza än ⅓ av en större pizza. Men detta är en falsk bild av bråk som ett särfall bland talen, för *alla* tal har ju den egenskapen i en motsvarande tillämpning. 2 små pizzor är ju också mindre pizza än 2 stora pizzor. Den andra fördelen med tallinjen är att bråk mindre än 1 och större än 1 samsas inom samma modell. Inom alla del-helhetsmodeller för bråk är det ett stort och svårt steg att utöka begreppet till bråk större än 1. Det beror på att man från början utgår från *det hela* (som delas i ett visst antal delar). Det är konstigt att tänka sig något som är större än *det hela*. I en tallinjemodell finns inget *det hela*. I stället är det 1 som är enheten och som delas in i det antal delar man är intresserad av.

Tallinjerepresentationen kan också fungera som en konsistent modell för multiplikation av både heltal och bråk (något som i kommentar-materialet behandlas vidare inom området multiplikativa strukturer).



Figur 7. Överst, en längdmodell för bråk. Underst, en tallinjemodell som inkluderar både längder och positioner och direkt erbjuder möjlighet att behandla bråk större än 1. Notera även att man på köpet får att 1 = 5/5 och i generella termer att 1 = *a*/*a* för alla a utom 0.

Ovan har det beskrivits hur bråkrepresentationen kan ges mening, till exempel med hjälp av tal-linjen. Bråkrepresentationen tillhör också ett symbolsystem – bråksystemet. Precis om tiopositionssystemet, som är det mest kända symbolsystemet i matematiken, erbjuder bråk-systemet möjligheter att behandla hur stora tal som helst. Med en hjälp av en liten samling grundläggande idéer och manipulationsregler erbjuder bråksystemet samma slags förtjänster. Bråksystemet har två centrala förtjänster som undervisningen ska behandla. Den första förtjänsten är *aritmetisk* och handlar om bråk-systemets förmåga att hantera *multiplikation* och *multiplikativ invers*. Att multiplicera i bråk-systemet innebär att multiplicera *täljare* och *nämnare* för sig, det vill säga $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

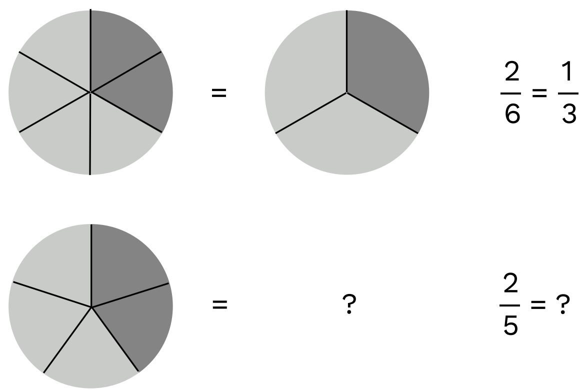
Detta introduceras ofta inte förrän på högstadiet, vilket troligen beror på att introduktionen av bråk som del-helhetsmodeller tillsammans med introduktionen av multiplikation inte erbjuder något enkelt sätt att förstå bråkmultiplikation vilket gör fenomenet alltför abstrakt för att hanteras på låg- och mellanstadiet. Multiplikativ invers handlar om att för något tal a (ej 0) hitta ett annat tal b så att $ab = 1$. Emedan det i positionssystemet inte är uppenbart hur man till exempel ska hitta den multiplikativa inversen till 3,2 är det enkelt i bråksystemet.

Bråket a/b (varken a eller b får vara 0) har inversen b/a, för att det vill säga $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$. eftersom "samma genom samma" alltid är lika med 1 i bråksystemet (0 undantaget) enligt tidigare resonemang på tallinjen. Så inversen till 16/5 (= 3,2) är 5/16 (= 0,3125, om man vill räkna ut det i decimalform).

Nästa förtjänst med bråksystemet handlar om vilka matematiska situationer eller fenomen som enkelt kan representeras i bråksystemet. Bråksystemet erbjuder ett gemensamt sätt att beteckna en mycket stor mängd olika multiplikativa situationer. För alla möjliga kvantiteter a och b (utom 0) som dessutom kan vara mätta i både samma eller olika enheter är a/b en beteckning för:

- Vad ska man multiplicera b med för att få a?
- Hur mycket mer (multiplikativt) är b än a?
- Vad är skalningsfaktorn som skalar b till a?
- Vad är förhållandet mellan a och b?
- Vilken är förändringsfaktorn som tar b till a?
- Vad är kvoten mellan a och b?
- Hur mycket b ryms i a?

I avsnittet om proportionella resonemang utvecklas bråkformens och bråksystemets användbarhet ytterligare. För kunna utnyttja bråksystemets användbarhet måste man dock också kunna arbeta inom bråksystemet. En viktig egenskap hos bråksystemet är att samma tal kan representeras på oändligt många olika sätt. Detta gäller inte för positionssystemet, där varje tal har en unik representation[6]. Det gäller till exempel att 2/6 = ⅓. När man skriver om ⅓ till 2/6 pratar man ofta om att förlänga bråket och den omvända ordningen kallas att förkorta. Det finns viktiga skäl att förlänga bråk, till exempel när man ska addera eller jämföra storlekar på olika bråk. Men att förkorta bråk har en särskilt viktig roll eftersom det ofta efterfrågas att bråk som representerar rationella tal och har heltal och både täljare och nämnare *skrivs i enklaste form*, det vill säga förkortas så långt som det är möjligt. När bråk introduceras med hjälp av del-helhets-modeller kan man förklara varför 2/6 = ⅓ genom att hänvisa till att 2 delar av 6 tar upp lika stor del av hela figuren som 1 del av 3. Det är dock högst oklart varför inte ⅖ kan förkortas. Finns det verkligen inte något smart sätt att dela in figuren som kan representera en förkortning?



Figur 8. Del-helhetsmodeller erbjuder låg förklaringsgrad för när bråk kan förkortas.

6 Det finns ett undantag som dock inte berör grundskolans matematik, nämligen att 1 = 0,99999 (ett oändligt antal 9:or) och varianter på samma sak.

Svaret är nej, vilket kanske går att fundera ut, men vad är egentligen villkoret som gör att 24/36 går att förkorta, men 23/36, 24/37 och 25/36 inte går? Det är svårt att förklara detta med schematiska bildsystem (del-helhetsmodellen), men enkelt att förstå och hantera i symbolsystemet, förutsatt att undervisningen tidigare har hanterat multiplikation av bråk, att a/a=1 och faktorisering och primtal. Inom den begreppsvärlden finns ett exakt svar på när att bråk kan förkortas. 2/6 kan förkortas för att exakt för att det kan skrivas som $\frac{2}{6} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$. I allmänhet kan ett bråk a/b förkortas om a och b har minst en gemensam faktor (som inte är 1). Om $a = ce$ och $b = de$ är nämligen $\frac{a}{b} = \frac{c \cdot e}{d \cdot e} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{e} = \frac{c}{d} \cdot 1 = \frac{c}{d}$. Här är det uttryck i bokstäver, det vill säga i en helt algebraisk representation, men redan olika exempel med specifika tal anger mönstret och kan ses som ett slags algebraiskt sätt att resonera med tal i bråkform. 23/36 kan inte förkortas för att 23 är ett primtal som inte har några gemensamma faktorer med 36 = 2·2·3·3. 24/37 kan inte förkortas för att 37 är ett primtal som inte har några gemensamma faktorer med 24·2·2·2·3. 25/36 kan inte faktoriseras för att 25 = 5·5 inte har några gemensamma faktorer med 36 = 6·6 = 2·2·3·3. Men 24/36 kan förkortas för att 24 = 2·2·2·3 och 36·2·2·3·3. Vi kan alltså gruppera ihop 2 2:or i både täljare och nämnare till 2/2 = 1, och en 3:a till 3/3 = 1. Kvar blir ⅔. Observera att detta helst aldrig ska förklaras genom att man stryker en 2:a i täljaren och en i nämnaren. Det bör alltid förklaras genom att man skapar 1:or i form av 2/2 eller rent allmänt a/a.

Hantering av bråkuttryck är i själva verket så viktigt och så beroende av faktorisering att det i sig utgör ett skäl att introducera multiplikation på ett sätt som gör faktorisering och primtal möjligt att förstå redan från början, en fråga som behandlas senare i kommentarmaterialet.

Om man ska utnyttja denna finess måste man alltså arbeta med faktorisering och primtal i multiplikationsundervisningen innan eller samtidigt som man börjar att arbeta med bråk.

Bråksystemets additiva egenskaper, det vill säga hur det fungerar när man adderar och subtraherar, behandlas under rubriken additiva strukturer.

Några andra representationer[7]

Det finns också andra representationer av tal som används i grundskolan. Två av dessa är specialvarianter av bråk. Decimalvarianten (decimalbråk) av positionssystemet använder system av tiondelar, hundradelar, tusendelar osv. Procentform är ett skrivsätt där alla tal skrivs som hundradelar, som när 0,5 = ½ = 50/100 = 50 %, eller 213 = 21 300/100 == 21 300 % eller 0.0001 = 0.01/100 = 0,01 %. Uppgifter som handlar om procent hör huvudsakligen till det område inom *4.2 Funktioner och samband* som heter *Proportionella resonemang*, men det kan finnas en särskild poäng i undervisningen att poängtera att procentform som tal betraktat bara handlar om att skriva ett tal som hundradelar, det vill säga $N = N \cdot 100$ %.

En ytterligare representationsform är roten ur, $\sqrt{a}$. Roten ur är samtidigt en funktion och ett beteckningssätt. Roten ur som funktion har ingen särskilt tydlig roll i grundskolematematiken, men är det funktion som för positiva tal x ordar ett positivt tal $\sqrt{x}$ sådant att $\sqrt{x}^2 = x$. Vad är $\sqrt{4}$ har alltså svaret 2. Men frågan vad är $\sqrt{2}$ har inget annat svar än $\sqrt{2}$. Det är den meningen rotbeteckningen också är ett system för att beteckna tal som inte kan representeras exakt vare sig med bråksystemet eller tiopositionssystemet.

7 En annan kritisk representation av tal och kvantiteter som hör grundskolan till är den speciella notation vi använder för att ange *tid* med hjälp av timmar, minuter och sekunder, men denna ligger – precis som undervisning om *klockan* det ligger utanför vad som finns möjlighet att behandlas ii denna rapport.

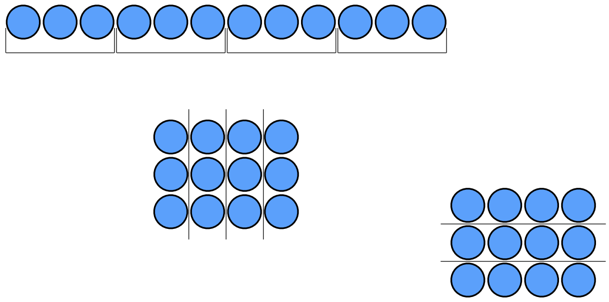
Förslag på text till avsnitt 3.3

3.3 Multiplikativa strukturer

Nästa delområde med redan nu mer utvecklade förslag till kommentarmaterial är avsnittet om *mulitplikativa strukturer*. Med detta avses huvudsakligen allt som har med *multiplikation* och *division* att göra, men även *förhållanden*, *skalningar*, *bråk* och liknande. När det gäller multiplikativa strukturer är det inte så enkelt att särskilja de situationer som motiverar begreppen och de representationer som man kan använda för att motivera och hantera begreppen. Därför beskrivs nedan ett gemensamt avsnitt som behandlar både situationer och representationer.

3.3.1 Innebörden av multiplikation och division och multiplikativa situationer och representationer

Multiplikation och division introduceras ofta på sätt som inte gör det uppenbart hur operationerna hänger ihop. Division introduceras nästan enbart via två olika klasser av situationer. Den som ofta kommer först är uppdelning eller likadelning. Om du har 12 saker som ska delas lika mellan 3 personer skriver du detta som 12/4 och får resultatet 4. Om man rent praktiskt ska hantera en sådan situation kan man dela i turordning. Dela ut en sak i taget till person 1, 2, 3 och 4 och börja sedan om. När alla saker är utdelade räknar man hur många var och en har fått.

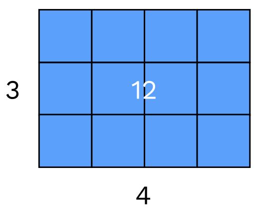


Figur 9. Uppdelning och likagruppering av 12 i 4 lika delar med 3 i varje del; det vill säga en situation som ger mening åt uttrycker 12/4 = 3. Samma ikoniska representationer kan också representera gruppering av 12 i lika delar med 3 i varje, så kallad innehållsdivision kan då ge mening åt uttrycket 12/3 = 4.

Den andra divisionssituationen är likagruppering, som även kallas innehållsdivision eller mätningsdivision. Denna divisionssituation handlar om att du har 12 saker som ska delas upp i grupper så att det är 4 i varje grupp. Även detta skrivs som 12/4 och svaret är 3. En viktig observation är att uppdelningssituationen för 12/4 = 3 i figur 9 ovan, samtidigt representerar likagrupperingssituationen 12/3 = 4. Det finns alltså två olika situationer, likadelning och likagruppering, som här till var sitt aritmetiskt uttryck 12/4 = 3 respektive 12/3 = 4 men som representeras av exakt samma ikoniska bildrepresentation. Detta är inget särskilt för talen 3, 4, och 12 utan gäller alltid, vilket man genom att resonera med hjälp av den i rektangelform arrangerade bilden kan förstå. Det vill säga om $a/b = c$ så är $a/c = b$ och detta är ett generellt samband.

Detta samband leder oss också in på multiplikation. Bland annat möjligheten att förstå divisioner med den typ av rektangelmodeller som ses i figur 9 motiverar att också multiplikation bör introduceras med hjälp av rektangelmodeller. Rektangelfiguren i figur 9 kan också användas för att ge mening åt multiplikationerna $3 \cdot 4 = 12$ och $4 \cdot 3 = 12$ och kopplas till situationerna att ta 3 kopior av fyror, det vill säga av grupper om 4 objekt, eller 4 kopior av treor, det vill säga av grupper om 3 objekt. Med rektangelrepresentationen ser man dessutom direkt att $12 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$. Inte heller detta är en egenskap som är härledd just med hjälp av talen 12, 3, och 4 utan från figurens form, det vill säga det gäller allmänt att $a \cdot b = b \cdot a$, det vill säga att multiplikation är en kommutativ operation.

Rektangelformationer behöver inte skapas med diskreta och separerade objekt, som i figur 9 ovan. Med fördel kan man använda enhetskvadrater, som i figuren nedan:

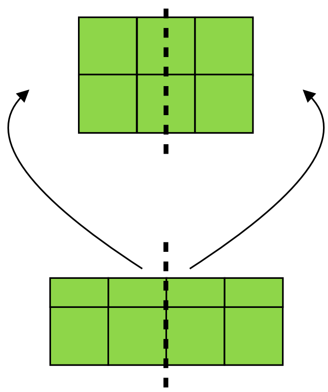


$$12 = 4 \cdot 3 \qquad \frac{12}{3} = 4 \qquad \frac{12}{4} = 3$$

Figur 10. $12 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$, $12/3 = 4$ och $12/4 = 2$ med enhetskvadrater i rektangelform.

En sådan trippel av aritmetiska uttryck kallas en multiplikativ talfamilj.

Från enhetskvadrater kan man också närma sig multiplikation och division med tal som inte är heltal. Betrakta till exempel $4 \cdot 1½$. I figur 11 nedan kan man se att $4 \cdot 1½$ kan klippas upp och omformas till $3 \cdot 2 = 6$, det vill säga vi kan se att $4 \cdot 1½ = 6$.



$$4 \cdot 1\frac{1}{2} = 3 \cdot 2 = 6$$

Figur 11. Omgruppering av multiplikation.

Med denna kunskap kan vi nu gå vidare och fundera på vilken multiplikativ talfamilj som genereras om man startar med $4 \cdot 1½ = 6$. Det ser vi i figur 12. Där vi även illustrerar samma sak med 1½ ersatt med den alternativa representationen 3/2.

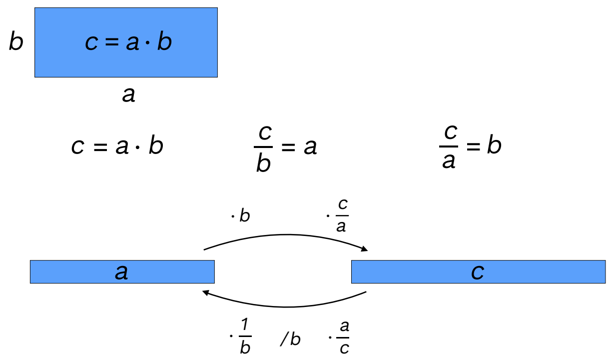
$$6 = 4 \cdot 1\frac{1}{2} \qquad \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2} \qquad \frac{6}{1\frac{1}{2}} = 4 \qquad 6 = 4 \cdot \frac{3}{2} \qquad \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad \frac{6}{\frac{3}{2}} = 4$$

Divisionen 6/4

Talet (bråket) 3/2

Figur 12. Multiplikativa talfamiljer med bråk.

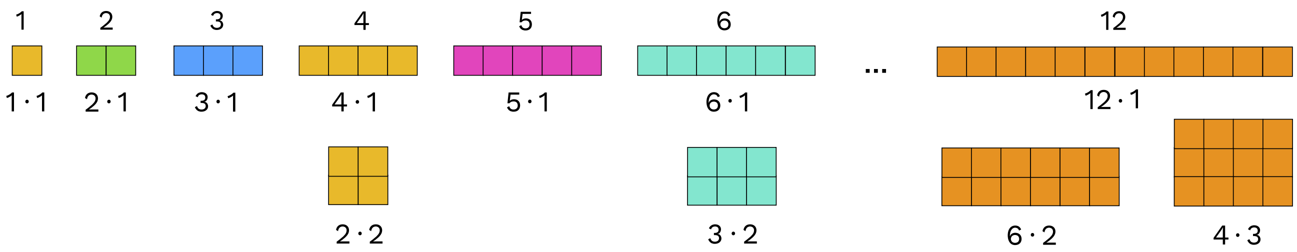
Genom att tänka sig att sådana här rektanglar kan ha vilka sidlängder som helst, det vill säga inte bara heltal eller bråk, kan man inse att idén om multiplikativa talfamiljer och det associerade sambandet mellan multiplikation och division måste gälla för vilka tal a och b men $a \cdot b = c$ som helst (så länge inget tal är 0).



Figur 13. Allmänna multiplikativa talfamiljer.

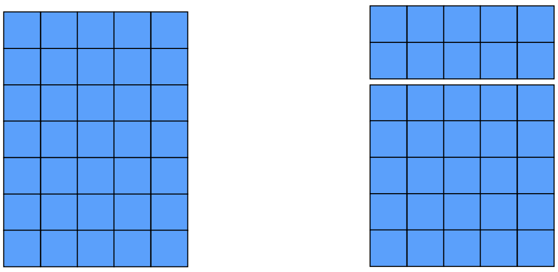
Detta kan användas för att utforska, och även beräkna, divisioner som man annars inte kan hantera. De flesta elever kan exempelvis redan vid skolstarten inse att $2 \cdot ½ = 1$. Två halva är hela saken. Ur sambandet ovan får vi då att $1/½ = 2$, vilket är en icke-trivial likhet. Särskilt om man tänker på division som uppdelning. Du kan ju inte dela upp 1 sak på en halv person.

Att utgå från rektangelmodellen vid multiplikation har flera andra fördelar. En viktig egenskap hos rektangelmodellen är att man redan innan man definierar multiplikation kan skapa uppgifter som handlar om två av de mest fundamentala aspekterna av multiplikation, nämligen *faktorisering* och *primtal*. Man kan dela ut olika mängder knappar, klossar eller andra likformiga föremål och fråga: *Vilka olika fyllda rektangelformer kan du bygga av ditt antal?* Till skillnad från motsvarande fråga inom det additiva området (se Figur 2) så har den multiplikativa frågan inte några förutsägbara svar. 12 kan till exempel byggas till $1 \cdot 12$, $2 \cdot 6$ och $3 \cdot 4$ (samt de kommutativa kopiorna) med för 13 finns bara $1 \cdot 13$. Det denna uppgift gör är att införa faktorisering, det vill säga att "multiplicera isär" tal. Att 13 endast har faktoriseringen (i heltal) $1 \cdot 13$ betyder per definition att 13 är ett primtal, som 2, 3, 5 och 7 också är.



Figur 14. Faktorisering och primtal.

En annan fördel med rektangelmodellen är att man kan visa hur olika multiplikationer hänger ihop, först i särskilda fall och sedan allmänt. Om man inte ännu har memorerat 5·7, så kan man ju se att den multiplikationen kan byggas av en 5·5 och en 5·2.



$5 \cdot 7 = ?$ $\qquad$ $5 \cdot 7 = 5 \cdot 5 + 5 \cdot 2$

Figur 15. Bygga multiplikationer av andra multiplikationer.

Genom att tillsammans i klassen bygga ihop den stora multiplikationsrutan nedan kan man identifiera många andra sådana mönster, som till exempel att hela 7:ans tabell kan byggas av 5:ans plus 2:ans.

Den stora multiplikationstabellen är också hjälpsam för att hantera divisioner, och förklarar därför varför det är så viktigt att så småningom kunna multiplikationstabellerna utantill, vilket alltså också innebär att kunna den *baklänges*, det vill säga veta vilka tal 0–100 som finns som produkter av multiplikationer inom området 0–10. Att använda multiplikationstabellen för att hantera divisioner bygger på att divisionen $a/b = \_$ kan formuleras som $b \cdot \_ = a$. Divisionen $42/6 = \_$ kan vi alltså tänka på som den öppna multiplikationsutsagan $6 \cdot \_ = 42$. För att lösa

Figur 16. Den stora multiplikationstabellen.

den behöver vi bara följa raden för 6 i tabellen, tills vi hittar 43 och se att den står i kolumnen för 7, så svaret är 7. Eller så söker vi i sexans tabell i minnet och finner att det är 6·7 som är 42.

Multiplikation och division behöver också utvidgas till bråksystemet. Som beskrivet inom området tal ovan, erbjuder bråksystemet några fundamentala *evalueringsregler* och *transformeringsregler*, nämligen:

$$a \cdot 1 = a \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{1} = a \qquad \frac{a}{a} = 1$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Figur 17. Evaluerings- och transformeringsregler i bråksystemet.

Det är med hjälp av dessa regler man ska hantera bråk i multiplikativa sammanhang. Vi har redan tidigare beskrivit att förkortning och förlängning av bråk (som i praktiken är en del i hur man räknar med bråk) hanteras med hjälp av dessa regler (det som återstår är division). Oavsett hur bråk har introducerats är det bäst att resonera med dessa regler i symbolsystemet när bråkdivision ska hanteras. Men kan tänka på processen som att först inse att problemet är att vi inte vet hur vi ska dividera med ett bråk, så vi neutraliserar nämnaren genom att multiplicera med dess invers. Men för att inte hela bråkat ska ändras måste vi multiplicera även täljaren med samma tal, det vill säga nämnarens invers. Vi använder alltså invers och att multiplikation eller division med det neutrala elementet i multiplikation (det vill säga 1) inte påverkar en multiplikation eller division, två gånger.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = ?$$

=1

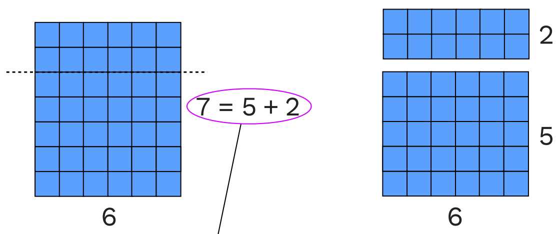
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

=1

Figur 18. Bråkdivision.

3.3.2 Beräkning av multiplikation och division och den distributiva lagen.

En ytterligare fördel med att huvudsakligen behandla multiplikation med en rektangelmodell är att ett av skolmatematikens viktigaste samband kan introduceras och användas redan på lågstadiet. Den *distributiva lagen* kopplar samman multiplikation och addition. I multiplikationen 6·7 kan 7 delas upp som 7=5+2. Som man enkelt ser genom att dela isär den rektangel som motsvarar 6·7 kan man alltså skriva, och därmed beräkna 6·7 som 6·7=6·5+6·2.



$$6 \cdot 7 = 6 \cdot (5 + 2) = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 2$$

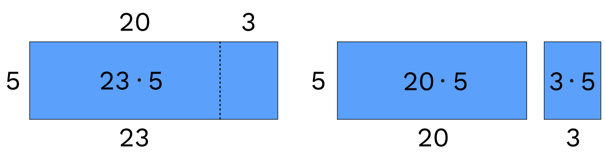
$$6 \cdot 7 = 6 \cdot (5 + 2) = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 2$$

Figur 19. Den distributiva lagen. Den additiva uppdelningen av 7 leder till en additiv uppdelning av multiplikationen 6·7.

Detta samband kan också användas baklänges för att faktorisera additiva uttryck. Båda de additiva komponenterna i uttrycket 30+12 innehåller en faktor 6 så därför är 30+12=6·5+6·2=6(5+2). På den allmänna nivån har vi alltså att $a(b+c)=ab+ac$.

Notera i figur 19 att parentesnotationen introduceras som en förenklad form av en inringning. 5+2 ringas in för att beteckna att multiplikationen 6· inte bara som vanligt ska verka på talet som står direkt efter utan hela det som är inringat.

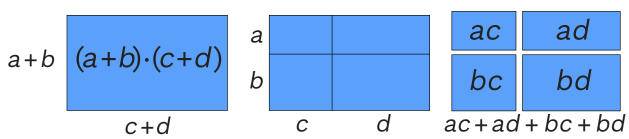
Den distributiva lagen är grunden för nästan all slags förenklad hantering av multiplikations- och divisionsberäkningar. När man hanterar 23·5 genom att dela upp beräkningen som 20·5+3·5, det vill säga genom att använda sig av talsorter och positionssystemet, så är det den distributiva lagen som förklarar varför det är möjligt.



$$23 \cdot 5 = (20 + 3) \quad 5 = 20 \cdot 5 + 3 \cdot 5$$

Figur 20. Distributiva lagen.

På liknande sätt kan man dela upp 23·13 i fyra delar och även visa den algebraiska versionen av den distributiva lagen.



$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

Figur 21. Den distributiva lagen i generell form.

Även metoder för division bygger på samma sätt på den distributiva lagen. Både när det gäller metoder som använder talsorter och positionssystemet, som kort division eller de flesta divisionsalgoritmerna. Undervisningen bör dock också behandla så kallad "chunking". Betrakta till exempel 896/8. Vi söker alltså lösningen på 8·_=896.

Vi ser inte lösningen direkt, men vi kan se att 8·100=800 är en produkt av 8 som vi både enkelt kan räkna ut och som får plats i 896. Med distributiva lagen har vi då att 896=8·800+96. VI kan nu se att 8·10=80 ryms i 96, så 896=8·100+8·10+16.

Slutligen ser vi att 16=8·2, så 896=8·100+8·10 +8·2=8·(100+10+2)=8·112, det vill säga svaret är 112. I divisionsform har vi alltså sekventiellt brutit isär division i delar som vi kunde hantera, utan att ha en explicit plan för hur det skulle sluta.

$$\frac{896}{8} = \frac{800}{8} + \frac{96}{8} = \frac{800}{8} + \frac{80}{8} + \frac{16}{8} = 100 + 10 + 2 = 112$$

Figur 22. Uppdelning av divisioner.

Förslag till text till avsnitt 4.4

4.4 Proportionella samband och resonemang

Det finns en kompetens som är helt avgörande för om elever lär sig den matematik som vi arbetar med i grundskolan; förmågan att hantera multiplikativa strukturer och proportionella resonemang med flyt. Den typ av problem som kan lösas med hjälp av proportionella resonemang, utgör majoriteten av alla problem elever förväntas hantera med flyt från årskurs 4 och upp till Matematik 1 på gymnasiet. Även i fysiken, kemin och biologin är proportionella resonemang helt centrala.

Med proportionalitet menar vi en situation där två kvantiteter är linjära mot varandra vilket gör att du genom att multiplicera eller dividera kan finna det som söks i problemet som ska lösas. En proportion är ett matematiskt begrepp som beskriver alla situationer där ett linjäritetsförhållande finns mellan två eller flera kvantiteter som en likhet mellan förhållanden eller en linjär funktion i en eller flera variabler. Proportionella resonemang är den aktivitet som det innebär att arbeta med proportioner. Proportionella resonemang är den starkast sammanbindande idéen i hela skolmatematiken. Den tar tid att utveckla begreppet linjäritet som är grunden för att ett proportionellt resonemang ska vara tillämpligt.

Proportionella resonemang används på multiplikativa relationer. Enklare uttryck så talar vi om alla situationer där vi behöver multiplicera eller dividera för att komma fram till svaret. Proportionalitet startar blygsamt i skolmatematiken med fördubbling, halvering och skalning av enkla bråk. Över tid, och genom årskurserna, tar sedan de proportionella resonemangen successivt mer och mer plats. Det är väl känt att elever över hela världen har svårt att utveckla förmågan att resonera proportionellt om bråk, procent, förhållanden, skalning, likformighet, trigonometri och förändringshastigheter. Typiska problem som kan lösas med proportionella resonemang är problem där två värden är givna och det tredje saknas och ska räknas ut, så kallat saknat-värde-problem. Problem av saknat värde karaktär genomsyrar skolmatematiken eftersom det återkommer inom alla matematiska områden som ingår i skolmatematiken. Proportionella resonemang används även för att lösa problem där eleven ska jämföra vilket förhållande som är större eller mindre än det andra.

Progression i utvecklandet av multiplikativa proportionella resonemang är väl beforskat. Eleverna behöver ges möjlighet att känna igen om situationer kräver ett additivt eller ett multiplikativt resonemang. När eleven väl har lärt sig identifiera en proportion behöver hen generella strategier för skalning till den okända kvantiteten. Eftersom en proportion definieras som en linjär funktion eller en likhet mellan två förhållanden $a/b = c/d$, är bråkbegreppet helt centralt för elevernas utveckling av de proportionella resonemangen. Särskilt kunskap om bråk som skalningsoperator och multiplikativ invers är helt avgörande för elevernas utveckling.

Att behärska proportionella resonemang omfattar följande kompetenser:

- Eleverna kan avgöra om en situation är additiv, multiplikativ eller en kombination av båda.
- Eleverna kan identifiera vilka kvantiteter som beskriver ett linjärt förhållande och använda proportionella resonemang för att lösa situationen.
- Eleverna behärskar den symboliska representation som används för att hantera proportionella resonemang.
- Elevernas kan explicit använda generella bråkkunskaper när de utför proportionella resonemang.
- Eleverna kan effektivt använda olika representationer för att utföra proportionella resonemang.

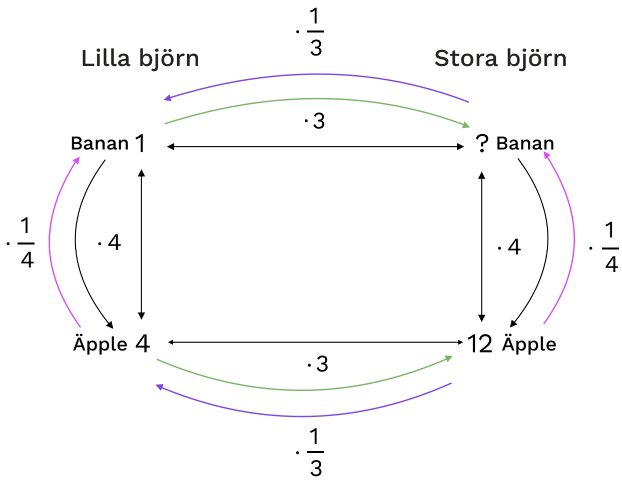
I avsnittet progressionslinjer för proportionella resonemang beskrivs vad och när ett visst innehåll ska arbetas med för att eleverna ska ges möjligheter att utveckla proportionella resonemang och när eleverna ska ha uppnått säkerhet i resonemangen. I avsnittet exemplifiering av innehåll illustreras progressionslinjerna med olika uppgiftstyper och problem.

Förslag till text till avsnitt 4.5: Progression genom årskurs 1–9 inom området funktioner, samband och algebra[8]

Årskurs 1–3

Enkla proportionella samband och skalningsoperatorer i form av naturliga tal och deras rationella inverser

I årskurs 1–3 ska undervisningen behandla enkla proportionella resonemang som bygger på barns intuition för att dela lika, fördubbla och halvera mängder och objekt samt skalning med naturliga tal. I undervisningen om skalning ingår att arbeta med naturliga tal och deras invers. Det innebär att bråk i form av rationella tal presenteras som skalningsoperator i enkla situationer som till exempel där en mamma björn har 3 gånger så många saker i sin ryggsäck som lilla björn, som alltså har ⅓ så många saker i sin ryggsäck. Det går bra att resonera med ord om att ha tre gånger så mycket och en tredjedel så mycket men det är viktigt att sambanden formaliseras med matematiska symboler så att eleverna ges möjlighet att tidigt börja vänja sig vid att matematisera situationer.



Figur 23. En diagrammatisk representation av proportionella relationer.

Ur definitionen av proportion som en likhet mellan två förhållanden $a/b = c/d$, följer att $a \cdot d = b \cdot c$. Undervisningen ska behandla varför det i proportionen $a \cdot d = b \cdot c$. är möjligt att halvera en faktor och dubblera den andra och fortfarande behålla samma värde på uttrycket, till exempel varför $6 \cdot 4 = 3 \cdot 8$. Här införs naturligt att en etta, som är neutral i multiplikation, kan skrivas som vilket naturligt tal som helst, multiplicerat med sin invers. I det enkla, men algebraiskt viktiga fallet 'halva-dubbla' använder vi ettan $1 = 2 \cdot ½$ tillsammans med kommutativa lagen för att visa tranformationen $6 \cdot ½ \cdot 4 \cdot 2 = 3 \cdot 8$. I just det här fallet, eftersom 6 även delas av 3, finns det möjlighet att visa att $6 \cdot ⅓ \cdot 4 \cdot 3 = 2 \cdot 12$. Utan att formalisera algebraiskt förbereds eleverna

8 Här med betoningen av progressionen genom delområdet *Proportionella samband och resonemang.*

genom undervisningen på att i årskurs 4–6 med primtalsfaktorisering och kreativa ettor kunna generalisera omskrivningen av heltalsuttryck $a \cdot b = a \cdot 1/c \cdot b \cdot c$, där *a* och *b* till en början är hela tal för att i årskurs 7–9 generaliseras till att gälla alla sorters matematiska uttryck.

Årskurs 4–6

Jämförelser mellan additiva och multiplikativa strukturer

I årskurs 4–6 ska undervisningen behandla jämförelser mellan additiva och multiplikativa situationer. Särskilt fokus ska läggas på att ge eleverna möjligheter att identifiera och särskilja additiva situationer från multiplikativa situationer. Undervisningen ska explicitgöra det multiplikativa förhållandet i proportionella situationer och kontrastera det mot additiva situationer och andra icke-proportionella situationer. Målet är att eleverna ska lära sig att analysera vilken matematisk idé som den givna situationen vilar på, oavsett om de har sett ett liknande problem tidigare eller inte. Men att kunna identifiera en multiplikativ situation där proportionella resonemang är tillämpliga räcker inte. Undervisningen ska också ge eleverna generella modeller för att matematisera multiplikativa situationer för att kunna beräkna det som efterfrågas i uppgiften eller problemet.

Identifikation av den multiplikativa relationen i förhållanden

Undervisningen ska tydligt definiera den multiplikativa relationen i bråkkonstruktioner och rationella uttryck. I årskurs 4–6 fokuseras undervisningen på multiplikativa heltalsoperatorer för skalning tillsammans med den motsatta operatorn, inversen i form av rationella tal. Skalningsoperatorer både inom och mellan mätenheter ska användas och diskuteras med eleverna. Undervisningen ska explicitgöra att samma lösningsmodeller kan användas för problem som delar samma struktur. Synliggörandet av att samma lösningsmodeller är tillämpliga på alla saknat-värde problem som vilar på en multiplikativ struktur problem kräver en konsekvent symbolisk representation. Undervisningen ska visa tydliga kopplingar mellan proportioner definierade som likheter mellan två förhållanden, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ och bråkrepresentationen.

Ett förhållande [eng. ratio] är en multiplikativ relation mellan två kvantiteter. Exempel på berömda förhållanden är till exempel relationen mellan omkretsen och diametern för cirklar, som för alla cirklar i planet är lika med talet pi (π); *sinus*, *cosinus* och *tangens* som beskriver relationerna mellan sidorna i rätvinkliga trianglar för olika vinklar och det gyllene snittet. I alla nämnda fall är uttrycksformen en kvot. Det är kvoten mellan omkretsen och diametern, O/d, som betecknas med π.

Undervisningen ska syfta till att elevernas konceptualisering π är att det är det konstanta förhållandet mellan omkretsen och diametern för alla cirklar i planet. Närmevärdet 3,14 har inte alls samma konceptuella innebörd. Det är bara ett tal som inte säger något om elevens förståelse för vad förhållandet representerar. I vardagligt tal betyder π att det att det är lite mer än tre gånger så långt runt en cirkelns rand (yttre kant) som längden rakt över mitten på cirkeln, diametern.

Symboliska representationer och generella modeller

Även då undervisningen i årskurs 4–6 fokuserar på hela tal är det viktigt att undervisningen redan nu är tydlig med att *a, b, c* och *d* kan vara vilka uttryck som helst. Detta för att undvika en missuppfattning om att generella räkneregler för bråk bara skulle gälla hela tal.

$$\frac{7}{4} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{a/b}{a} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n} \qquad \frac{0.5}{6.7} \qquad \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad \frac{x^2+1}{2x^3-4x}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{a}=1 \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1 \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Figur 24. Exempel på bråkrepresentationer och räkneregler som gäller för dem.

Särskilt fokus ska läggas på att särskilja olika konceptualiseringar av *bråkbegreppet*. Bråk i betydelsen del av helhet, del av antal och tal på tallinjen är introducerat i årskurs 1–3. I årskurs 4–6 ska undervisningen behandla bråk som del:del förhållanden och operatorer.

Undervisningen ska behandla att det är skillnad på del:del-förhållanden och del/helhetsbråk. Till exempel, om ett företag anställer 11 kvinnor och 31 män representerar del/helhets-bråken 11/42 och 31/42 förhållandet mellan kvinnor och män i förhållande till helheten. Om eleverna istället ska beskriva företagets könsfördelning är det del:del-förhållandet 11:31 mellan kvinnor och män som är relevant. Del:del-förhållandet beskriver två delar av samma helhet. Deras summa utgör helheten (här 42). Elever har visat sig ha svårt att känna igen del:del-förhållanden och att särskilja dem från egenskaperna hos del/helhets-förhållanden. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att arbeta med situationer som kräver en övergång från del:del- till del/helhets-förhållanden. Undervisningen ska behandla de olika notationerna för förhållanden. Vi använder både rakt bråkstreck, snett bråkstreck och kolon för att representera förhållanden. Det är mycket viktigt att eleverna förstår att de olika notationerna signalerar ett förhållande. Oavsett vald notation så gäller generella räkneregler för bråk. I kommentarmaterialet har vi valt att använda kolon för del:del förhållande och rakt eller snett bråkstreck för del-helhets förhållande.

Undervisningen ska behandla bråk som operator. Att kunna skapa en operator på formen b/a som transformerar (skalar) ett godtyckligt uttryck a till ett godtyckligt uttryck b är särskilt viktigt för elevernas utveckling av proportionella resonemang. Förståelsen för operatorn kan byggas via bråk som multiplikativ invers (räkneregel 4).

Räkneregler för förhållanden skrivna på bråkform:

1. Ett tal n kan skrivas i bråkform som $n/1$.
2. $a/b = c/d$ om och endast om ad = bc ; b och d är skilda från noll
3. $a/b \cdot c/d = ac/bd$; b och d är skilda från noll
4. Ett tal a/b har en multiplikativ invers som ges av $(a/b)^{-1} = b/a$.
5. $a/b \div c/d = a/b \cdot d/c = ad/bc$; b och d är skilda från noll

Bråk som operator används för att transformera (skala) ett godtyckligt tal till ett annat. Vi exemplifierar med frågan: Vad ska du multiplicera 8 med för att få produkten 7?

$$8 \xrightarrow{?} 7$$

I det här fallet är det 7/8 som du ska multiplicera 8 med för att transformera åttan till produkten 7.

$$8 \xrightarrow{\cdot \frac{7}{8}} 7$$

Operatorn skapas $\frac{7}{8}$ skapas genom att multiplicera uttrycket med den multiplikativa inversen till 8, för att få mellansteget 1, multiplicerat med 7, $\frac{1}{8} \cdot 7 = \frac{7}{8}$

Att det fungerar så här kan också visas med hjälp av tre aritmetiska regler.

- Alla heltal kan skrivas som bråk genom att införa det neutrala elementet 1 i nämnaren, det vill säga att 8 kan skrivas som $\frac{8}{1}$.
- Två bråk som ska multipliceras får skrivas på ett gemensamt bråkstreck $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 8}$.
- Kommutativa lagen gäller.

$$8 \cdot \frac{7}{8} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 8} = \frac{8}{8} \cdot \frac{7}{1} = 1 \cdot \frac{7}{1} = 7$$

Undervisningen ska behandla det generella fallet för skapande av bråk som operator. Även då undervisningen i årskurs 4–6 företrädesvis behandlar hela tal ska undervisningen utmana elevernas begreppsförståelse genom att visa att en operator kan skapas av alla sorters uttryck. Detta för att lägga en grund för en utvidgning av begreppet i årskurs 7–9.

$$a \xrightarrow{\cdot \frac{b}{a}} b$$

I årskurs 4–6 införs *tildetecknet* (~) för att signalera att ett proportionellt förhållande mellan två eller flera kvantiteter existerar.

Två modeller för att hantera proportionella resonemang ska presenteras:

1. *Tilde-tabellen* för bygga-upp-strategier.
2. *Kommuterande diagram* för att matematisera så kallade saknat-värde situationer med skalning både inom och mellan enheter.

Vid sidan av dessa modeller kan läraren fritt välja att arbeta med andra modeller som till exempel den singaporianska block-modellen för att ge eleverna ytterligare verktyg att variera sina modeller och representationsformer.

Tilde~tabellen används för att bygga ihop en lösning till en proportionell situation. Både multiplikativa och additiva resonemang används i lösningar med tilde~tabeller. Tabellen är mycket effektiv då den ger stor frihet till eleven att resonera om det givna problemet så länge det proportionella förhållandet respekteras. Vi exemplifierar med ett problem:

Igår köpte jag 12 bitar godis för 28 kronor. Idag ska jag gå tillbaka och köpa samma sorts godis till samma pris för 35 kronor. Hur många godisbitar får jag?

Undervisningen ska behandla ett strukturerat sätt att redovisa sina bygga-upp-strategier i form av en tilde~tabell. Eleverna ska skala om det proportionella förhållandet 12 bitar för 28 kronor på olika sätt tills de kan bygga ihop det till 35 kronor. Det här är en kreativ process och den enda matematiska regel eleverna behöver beakta är att det första paret som eleverna har identifierat som den proportionella relationen ska följas åt i skalningen. I varje steg i processen utförs antingen en skalning av ett tidigare steg, eller så adderas eller subtraheras tidigare steg.

Vi använder tilde tecknet, ~, för att kommunicera att 12 st ~ 28 kr (är proportionella).

st ~ kr	
12	28
6	14
3	7
12+3 =15	28+7=35

Figur 25. En tilde~tabell.

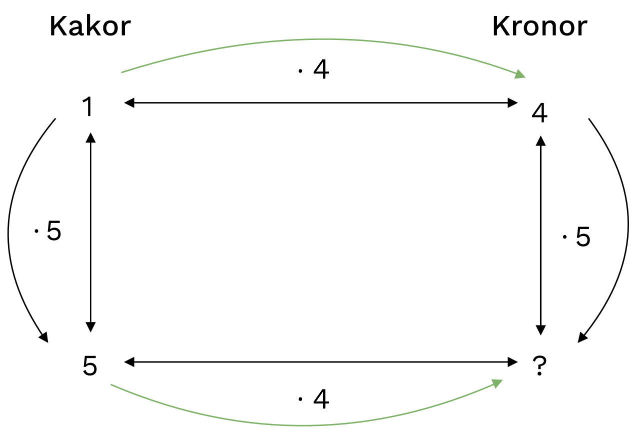
Varje rad innehåller en kombination av godisbitar och pris som är proportionell mot ursprungsrelationen, 12 godisar för 28 kronor, som står överst. Målet är att identifiera antalet godisar eleverna kan köpa för 35 kronor. Genom att halvera den proportionella relationen två gånger, först till 6~14 och sen till 3~7, nås all information som behövs för att svara på frågan. Halveringarna är multiplikativa operationer. Dessa kombineras med en additiv operation där 28+7 adderar upp till 35 och motsvarande antal adderar upp till 15, som är svaret på frågan. Tilde¨~tabeller och bygga upp strategier kan användas på alla proportionella situationer där ett saknat värde söks.

En proportion som en likhet mellan två förhållanden består av fyra kvantiteter $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Då ett värde saknas kan vi resonera oss fram till detta med hjälp av proportionella resonemang inom eller mellan enheter i ett kommutativt diagram. Ett kommutativt diagram skiljer sig från tilde~tabellen då resonemangen är enbart multiplikativa. Det vill säga att inga additiva inslag finns så som det gör i de bygga-upp strategier som används i tilde-tabellerna. Vi använder relationerna inom eller mellan de kvantiteter som utgör proportionen i fråga. Ett kommutativt diagram kan användas som modell för alla proportionella situationer. Men låt oss betrakta en av de enklaste av alla matematiska situationer. En som eleverna arbetar med redan i årskurs 2.

Hur mycket pengar behöver du för att köpa fem kakor som kostar fyra kronor styck?

Modellen *kommutativt diagram* kräver tre kända kvantiteter och efterfrågar en okänd som vi ska beräkna, där alla fyra kvantiteterna är relaterade i en likhet av typen ab = cd. Vid en första anblick på frågan ser vi bara två givna kvantiteter, de 5 kakorna till priset av 4 kr/st. Men vi har implicit har fått reda på vad 1 kaka kostar genom enheten kr/st. Faktum är att det alltid finns en 'implicit etta' i multiplikativa situationer. En helt vanlig multiplikation, som till exempel, 3·5 = 15 kan också skrivas 3·5 = 15·1 eftersom 1 är det neutrala elementet i multiplikation.

Så här modelleras kak-situationen i ett kommuterande diagram för proportionellt resonemang där kakor (st) ~kronor (kr).



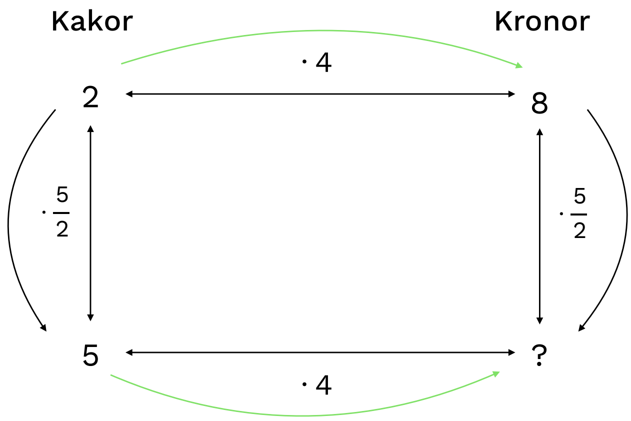
Figur 26. Multiplikativa relationer inom och mellan enheterna i kak-köpet.

Uppe i vänstra hörnet av vår modell representerar ettan, 1 kaka och under ettan skriver vi in kostnaden för kakan, 4 kr. Längst upp till höger skriver vi 5, vilket representerar 5 kakor. Nu har vi matematiska relationer i två dimensioner. Inom antalet aktuella kakor (vänster sida lodrätt) och mellan antalet kakor och hur mycket en kaka kostar (översta raden vågrätt). De svängda svarta pilarna representerar resonemang inom antalet kakor. De böjda gröna pilarna representerar resonemang mellan kvantiteterna kakor och kronor. Ett resonemang inom kak-kvantiteten innebär att eftersom 5 kakor är 5 gånger så mycket som 1 kaka så kan vi hitta kostnaden för fem kakor genom att multiplicera 4 kr med 5. Det går lika bra att använda ett resonemang mellan kvantiteterna kakor och kronor. Eftersom 1 kaka kostar 14 kr så kostar 5 kakor 54 kr. Att vi kallar diagrammet för kommuterande beror på att vi kan ta oss från övre vänstra hörnet till det nedre högra hörnet på två sätt med samma resultat.

Det är alltså fritt fram att resonera både inom kvantiteterna, vilket kan förstås en upp- eller nedskalning av kakor och låta kronorna följa med. Att i stället utgå från relationen mellan kakor och kronor kallas också ett funktionsresonemang. Skalfaktorn mellan enheter beskriver proportionalitetskonstanten i en linjär funktion som utgår från origo.

Undervisningen ska behandla sammanbindande matematiska idéer som återkommer inom olika matematiska områden. Vi behöver inte den här modellen för att beräkna att fem kakor kostar 5 kakor · 4 kronor (per kaka) = 20 kronor. Syftet med modellen är att visa att majoriteten av alla uppgifter från årskurs 2, när multiplikation införs, till årskurs 9 följer en struktur kan förstås med den här modellen.

Vi kan också notera att om vi hade vetat att 2 kakor kostar 8 kronor och undrat vad 5 kakor kostar, så hade vi modellerat med det kommuterade diagrammet nedan där vi inte känner till vad en kaka kostar.



Figur 27. Ett kommuterande diagram med skalningsoperator i bråkform för resonemang inom enheter.

Skalfaktorn inom enheterna kakor respektive kronor utgörs av bråkoperatorn $2/5$. Resonemanget om proportionell skalning mellan enheter utgörs av heltalsoperatorn 4.

Eleverna ska i årskurs 4–6 behärska skalning med heltalsoperatorer. I årskurs 7–9 ska de även behärska skalning med operatorer konstruerade av reella tal i bråkform. Det är därför viktigt att eleverna redan i årskurs 4–6 presenteras för operatorer som inte är hela tal.

Undervisningen ska lägga särskild vikt på att procent är ett proportionellt multiplikativt samband där vi relaterar till helheten 100. De båda presenterade modellerna tilde~tabell och kommutativt diagram kan användas för alla situationer som beskriver en procentuell förändring.

Undervisningen i årskurs 4–6 ska introducera enkla proportionella resonemang om sammansatta enheter. En sammansatt enhet [eng. rate] är ett förhållande där två enheter som mäter olika kvantiteter kombineras till en ny enhet. Hastighet, kilopris och densitet är exempel på förhållanden som består av relationer som sätts samman av mått som mäter olika kvantiteter.

Sammansatta enheter är ur konceptuell synpunkt särskilt besvärliga eftersom den redan fastställda relationen mellan två enheter gör det intrikat att relatera den till en annan situation med samma sammansatta enhet. Sammansatta enheter behandlas djupare i årskurs 7–9, företrädesvis med funktionsdefinitionen av proportionella resonemang som utgångspunkt för fördjupningen av begreppet sammansatta enheter.

Årskurs 7–9

Jämförelser mellan additiva och multiplikativa strukturer samt en utvidgning av operatorbegreppet

I årskurs 7–9 ska eleverna behärska jämförelser mellan additiva och multiplikativa situationer. Särskilt fokus ska läggas på att ge eleverna möjligheter att identifiera och särskilja additiva situationer från multiplikativa situationer. Undervisningen ska explicitgöra det multiplikativa förhållandet i proportionella situationer och kontrastera det mot additiva situationer och andra icke-proportionella situationer. Eleverna ska kunna analysera vilken matematisk idé som den givna situationen vilar på oavsett om de har sett ett liknande problem tidigare eller inte. Undervisningen ska utöka räckvidden för de generella modeller för att matematisera multiplikativa situationer som har presenterats i årskurs 4–6.

Undervisningen om multiplikativa heltalsoperatorer för skalning och dess invers utvidgas till att omfatta skalningsoperatorer i bråkform generellt konstruerade av reella tal eller uttryck. Användningen av skalningsoperatorer både inom och mellan mätenheter ska användas och diskuteras med eleverna. Undervisningen ska explicitgöra att samma lösningsmodeller kan användas för problem som delar samma multiplikativa struktur. Synliggörandet av att samma lösningsmodeller är tillämpliga på alla multiplikativa saknat-värde problem som vilar på en multiplikativ struktur problem kräver en konsekvent symbolisk representation. Undervisningen ska visa tydliga kopplingar mellan proportioner definierade som likheter mellan två förhållanden, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ och bråkrepresentationen.

Identifikation av den multiplikativa relationen i sammansatta förhållanden

Undervisningen ska behandla linjäritet i sammansatta förhållanden. I årskurs 4–6 har eleverna arbetat med enkla proportionella resonemang om sammansatta enheter. I årskurs 7–9 ska undervisningen ge eleverna möjlighet att fördjupa begreppet. Ett förhållande [eng. ratio] är ett uttryck av en multiplikativ jämförelse mellan två kvantiteter. Exempel på berömda förhållanden är till exempel relationen mellan omkretsen och diametern för cirklar, som för alla cirklar i planet är lika med talet pi (π). Relationerna mellan sidorna i rätvinkliga trianglar beskrivs med förhållandena sinus, cosinus och tangens, som beskriver relationerna för varje given vinkel. Det gyllene snittet beskriver förhållandet mellan sidor i en rektangel för att den enligt myten ska se så estetisk som möjligt i betraktarens ögon.

När man bestämmer sig för att definiera förhållande så här, så har man inte angivit hur förhållandet ska uttryckas. I exemplen ovan är den vanligaste representationen en kvot. Det är kvoten O/d som betecknas med π. Det är därför förhållandet π kan uttryckas som ett tal. Det är förhållandena mellan par av motstående sida, närliggande sida och hypotenusan som beskrivs med de olika kvoterna tangens, sinus eller cosinus. Det gyllene snittet, kan beskrivas som förhållandet mellan sidorna på en viss rektangel eller genom likheten $(a+b)/a=a/b$. Det som vi ovan benämner som kvoter kan lika gärna benämnas bråk eftersom de representeras med hjälp täljare, bråkstreck och nämnare. Generella räkneregler för bråk gäller alltså. En kvot tänker man vanligen på som en outräknad division, men rent matematiskt går det inte att skilja ett bråkuttryck från en kvot. Alla bråk är förhållanden och bråk är den vanligaste representationen för att uttrycka förhållanden.

Det som på engelska kallas rate är ett mer komplicerat begrepp. En rate uppkommer när vi identifierar att i en viss situation gäller alltid ett givet förhållande. Typexemplet är medelhastighet. Att något rör sig med en viss medelhastighet, v, säger ingenting om hur lång resan var eller om hur lång tid den tog, men det säger att för varje tänkbar resa med medelhastigheten v så kan kvoten mellan den färdade sträckan och tiden det tog att färdas den beskrivas med v. Att hastighet uppför sig på det här sättet beror på att vi har valt att mäta hastighet med en sammansatt enhet, det vill säga en enhet som är konstruerad som ett förhållande mellan två andra enheter. Det är bara för fenomen som vi väljer att mäta med hjälp av en kvot av andra enheter som en rate kan uppkomma. Det är alltså viktigt att notera att det inte själva fenomenet man mäter som är sammansatt av andra fenomen. Rörelse är alltså inte i sig sammansatt av sträcka och tid, vi bara väljer att kvantifiera rörelse med hjälp av enheter för sträcka och tid. Vilka fenomen som mäts med sammansatta enheter är helt och hållet en fråga om hur vi människor väljer att konstruera våra mätsystem. Det finns alltså ingenting i sig som gör fenomenet rörelse annorlunda än fenomenet sträcka. Med det faktum att rörelse vanligen kvantifieras med hjälp av en sammansatt enhet skapar komplikationer när man ska räkna med rörelse som inte uppkommer när man räknar med sträckor. Exakt samma svårigheter uppkommer för andra fenomen som vi mäter med sammansatta enheter, som till exempel densitet eller kilopris. Extra besvärligt blir det med fenomen som mäts med sammansatta enheter som har fått egna namn, som till exempel hastighet.

Undervisningen ska behandla komplexiteten i sammansatta enheter. För att illustrera hur sammansatta enheter fungerar kan exemplet hastighet användas. När vi säger att hastigheten är 12 km/h så är det ju inte uppenbart hur talet 12 (km/h) skiljer sig från talet 12 (m). Men det är stor skillnad eftersom 12 meter plus 6 meter är 18 meter i absoluta mått, men 12 km/h plus 6 km/h har en oklar betydelse. Om du rör dig i 12 km/h och ökar hastigheten med 6 km/h så fungerar det matematiskt att addera hastigheterna. Men om du först färdas en sträcka med 12 km/h och sedan en sträcka med 6 km/h så går det inte att addera hastigheterna och få ut någon relevant information. Även medelvärden av sammansatta enheter är intrikata. Om du springer 12 km varannan dag och 6 km varannan dag springer du i genomsnitt $(12+6)/2=9$ km per dag. Men om du varannan dag springer en viss sträcka i 12 km/h och varannan dag går samma sträcka i 6 km/h kan du inte använda samma medelvärdesberäkning för att ta reda på din medelhastighet. Medelhastigheten blir istället 8 km/h.

Att identifiera vad som kan vara kruxet med att beräkna medelhastigheten i en situationen där du först springer 10 km i 12 km/h och dagen efter går 10 km i 6 km/h kräver en djupare förståelse av begreppen hastighet, tid och sträcka, och deras relationer. Sträcka är en bilinjär funktion av tid och hastighet, $s(v, t) = vt$. Avståndet är alltså proportionellt mot både tid och hastighet. I situationer där antingen tid eller hastighet hålls konstant kan man därför förlita sig på linjäritet. Men begreppet hastighet är mer komplicerat eftersom det är en funktion av en sträcka i förhållande till den fasta tidsenheten en timme. Hastigheten är alltså omvänt proportionell mot tiden, när avståndet hålls konstant. Detta ger att, i en situation där avståndet är konstant, är linjäritet inte längre tillämplig. Denna idé är alltså mer komplicerad än direkta proportioner. Just därför kan genomsnittshastigheter skapa ett epistemologiskt hinder för elever som har befäst sina lösningsstrategier med utgångspunkt i linjäritet. Ett vanligt felresonemang är att eleverna använder en aritmetiskt-medelvärde-strategi, (12 km/h + 6 km/h)/2 = 9 km/h. Den sammansatta enheten kräver dock att eleverna reder ut den totala sträckan och dividerar den med den totala tiden som används för att förflytta sig denna sträcka. Total sträcka är enkelt, 10 km + 10 km = 20 km. Tiden är värre. Springdagens tid är 10 km/12 km/h och gå-dagens tid är 10 km/ 6 km/h. Den totala tiden är 10/12+10/6=30/12 h=5/2 h. Nu kan vi beräkna medelhastigheten till 20/(5/2) = 8 km/h.

Resonemanget ovan belyser att det inte är möjligt att beräkna ett genomsnitt av två genomsnittshastigheter, om inte de refererar till samma tidsintervaller. Precis den inneboende sammansatta relationen mellan enheterna är grunden för begreppet sammansatt enhet, som kilopris, densitet och hastighet. Sammansatta enheter representeras med fördel som linjära proportionella funktioner där täljarens enhet beskrivs av y-axeln och nämnaren enhet beskrivs på x-axeln. Även då undervisningen ska behandla komplexiteten i sammansatta förhållanden kan man inte förvänta sig att alla elever kommer kunna utföra korrekta resonemang i slutet av årskurs 9 på grund av begreppets komplexitet.

Algebraisk utvidgning av symboliska representationer och generella modeller

Undervisningen ska behandla att *a, b, c* och *d* kan vara vilka uttryck som helst. Detta för att undvika en missuppfattning om att generella räkneregler för bråk bara skulle gälla hela tal.

Särskilt fokus ska precis som i årskurs 4–6 läggas på att särskilja olika konceptualiseringar av bråkbegreppet. I årskurs 4–6 har undervisningen behandlat bråk som del:del förhållanden och operatorer med företrädesvis hela tal. I årskurs 7–9 ska konstruktionen av operatorer i bråkform utvidgas till att omfatta alla reella tal och uttryck.

Via undervisningen ska eleverna bli förtrogna med generella räkneregler för bråk och kunna tillämpa dem på alla sorters kvotkonstruktioner.

Räkneregler för förhållanden skrivna på bråkform:

1. Ett tal n kan skrivas i bråkform som $n/1$.
2. $a/b = c/d$ om och endast om ad = bc ; b och d är skilda från noll
3. $a/b \cdot c/d = ac/bd$; b och d är skilda från noll
4. Ett tal a/b har en multiplikativ invers som ges av $(a/b)^{-1} = b/a$.
5. $a/b \div c/d = a/b \cdot d/c = ad/bc$; b och d är skilda från noll

Eleverna ska behärska att transformera (skala) ett vilket godtyckligt uttryck som helst till ett annat. Till exempel:

$$e \xrightarrow{\cdot \frac{\pi}{e}} \pi$$

Eleverna ska behärska det generella fallet för skapandet av bråk som operator i bråkform.

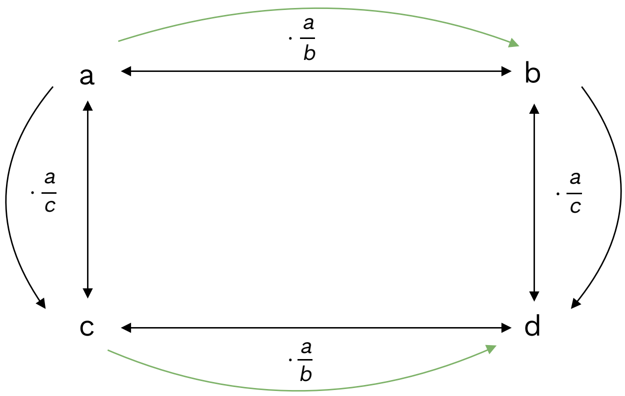
$$a \xrightarrow{\cdot \frac{b}{a}} b$$

$$\frac{7}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{a/b}{a} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n} \quad \frac{0.5}{6.7} \quad \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \frac{x^2+1}{2x^3-4x}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{a} = 1 \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

Figur 28. Exempel på bråkrepresentationer och räkneregler som gäller för dem.

Undervisningen ska behandla generella modeller som sammanbinder matematiska idéer som återkommer inom olika matematiska områden. I årskurs 4–6 introducerades eleverna till tilde~tabeller och kommuterande diagram med hela tal och deras inverser (rationella tal) som skalningsoperatorer. I årskurs 7–9 ska eleverna behärska att modellera en godtycklig proportionell situation från alla matematiska områden som har behandlats under årskurs 1–9 med ett kommutativt diagram.



Figur 29. Ett generellt kommuterande diagram med skalningsoperator i bråkform för resonemang inom och mellan enheter.

Del III – Förslag till struktur och rubriker en ny kursplan i ämnet Matematik

Kursplanens utformning

I enlighet med våra tidigare diskussioner menar vi att kursplanen i matematik kan inledas med en relativt kort beskrivning av ämnet och övergripande mål, ungefär som idag. Vi menar dock att det också bör finnas korta stadierelaterade texter som beskriver det något olika övergripande fokus för undervisningen som vi föreslår för förskoleklass och de olika stadierna. Vi har dock inte utvecklat sådan kursplanetext. Nedan presenterar vi alltså bara exempeltext för vissa delar av det centrala innehållet som vi har beskrivit i förslaget till kommentarmaterial i Del II. Vi föreslår att rubrikerna i kursplanen anger rubriker på en finare nivå än i dagens kursplan, och att det centrala innehållet differentieras med det två uttrycken *Undervisningen ska behandla*... och *Eleverna ska behärska.* Med denna teknik tänker vi oss att vinna två saker. Dels att det tydligare kan skrivas fram vilka kunskaper systemet faktiskt slår fast att eleverna ska nå. Men också att man med hjälp av att skiva fram vad undervisningen ska behandla tydligare kan styra undervisningens inriktning, mot tex att använda vissa representationer och behandla vissa sätt att resonera. Det går alltså på så sätt att skriva in mer avancerat innehåll, utan att det samtidigt ställs allt för stora krav på vad eleverna ska lära sig. Genom att avancerat innehåll introduceras tidigare får elever helt enkelt mer tid på sig att vänja sig vid detta innehåll.

Vi tänker oss att för vart och ett av de fyra stadierna förskoleklass, 1–3, 4–6 och 7–9 skapas en rubrikstruktur för det centrala innehållet som motsvarar det vi har tagit fram för kommentarmaterialet. Man kan i praktiken tänka sig vissa variationer i rubriknivåerna mellan stadier. Exempelvis kanske man inte nämner notationen f(x) i förskoleklassens centrala innehåll. Men huvudsakligen kan man reglera innehållet genom att förskjuta mängd innehåll mellan det som ska behärskas och det som ska behandlas.

Förskoleklass/Årskurs 1–3/ Årskurs 4–6/ Årskurs 7–9

Aritmetik och algebra

- Tal
  - Behärska
  - Behandla...
- Additiva strukturer
  - Behärska
  - Behandla...
- Multiplikativa strukturer
  - Behärska
  - Behandla...
- Uttryck, likheter och ekvationer
  - Behärska
  - Behandla...

Funktioner, samband och algebra

- Variabler och hur situationer kan representeras med aritmetiska uttryck och ekvationer
  - Behärska
  - Behandla
- Representationer av samvariation och koordinatsystem
  - Behärska
  - Behandla
- Funktionsnotationen f(x) och hur den kan representeras i koordinatsystem
  - Behärska
  - Behandla
- Proportionella samband och resonemang
  - Behärska
  - Behandla
- Geometri och mätning
  - Delområden
- Sannolikhet och Statistik
  - Delområden

Några exempel på möjliga formuleringar

Skrivningar om multiplikativa strukturer för årskurs 1–3 skulle kunna formuleras enligt nedan. Observera att det är en avsevärd skärpning relativt vad som står i dagens kursplan, men att det mesta är formulerat i termer av vad undervisningen ska behandla. Avsikten med detta är att styra undervisningen mot sätt att hantera multiplikativa strukturer som stämmer med forskningen på området.

Multiplikativa strukturer (1–3)

Undervisningen ska tydligt och återkommande behandla innebörden av multiplikation och division samt hur operationerna hänger ihop med hjälp av situationer och schematiska bildrepesentationer. Eleverna ska behärska att känna igen multiplikativa situationer och kunna representera dem med schematiska bilder och aritmetiska uttryck för multiplikation och division.

Undervisningen ska behandla faktorisering och primtal. Eleverna ska behärska att faktorisera tal upp till 100.

Undervisningen ska tydligt och återkommande behandla relationer inom multiplikationstabellerna 1–10 samt hur dessa kan användas för att beräkna multiplikationer. Eleverna ska behärska multiplikationstabellerna upp till 10 i praktiska sammanhang, till exempel kunna använda sambandet $7 \cdot 8 = 56$ för att konstatera att $56/8 = 7$.

Undervisningen ska behandla den distributiva lagen i form av ikoniska rektangelmodeller och hur den distributiva lagen kan användas vid multiplikationsberäkningar.

Undervisningen ska tydligt definiera den multiplikativa relationen i bråkkonstruktioner och rationella uttryck samt hur bråkrepresentationer kan användas som operator vid skalning och för att ange förhållanden.

I samband med undervisningen om förhållanden ska särskilt fokus läggas på att introducera och särskilja olika konceptualiseringar av bråkbegreppet: bråk i betydelsen del av helhet, del av antal och tal på tallinjen, bråk som mått, det vill säga som del av en enhet och relationen till multiplikation, samt bråk som operator.

Inom området Proportionella resonemang för 4–6 kan skrivningen se ut enligt följande:

Proportionella samband och resonemang (4–6)

Undervisningen ska behandla jämförelser mellan additiva och multiplikativa situationer. Särskilt fokus ska läggas på att ge eleverna möjligheter att identifiera och särskilja additiva situationer från multiplikativa situationer. Eleverna ska behärska hur olika multiplikativa och additiva situationer beskrivs med matematiska uttryck.

Undervisningen ska behandla att samma lösningsmodeller kan användas för problem som delar samma multiplikativa struktur, oavsett om problemen är aritmetiska, geometriska eller kommer från något annat område. Undervisningen i årskurs 4–6 ska introducera enkla proportionella resonemang om sammansatta enheter, där två enheter som mäter olika kvantiteter kombineras till en ny enhet. Hastighet, kilopris och densitet är exempel på förhållanden som består av relationer som sätts samman av mått som mäter olika kvantiteter.

Undervisningen ska behandla proportioner definierade som likheter mellan två förhållanden, $ab = cd$ och att samma multiplikativ relation kan uttryckas som $a/c = d/b$. Eleverna ska behärska resonemang om proportionella samband av typen $ab = cd$ och skalningsoperatorer i form av naturliga tal och deras rationella inverser.

Undervisningen ska lägga särskild vikt vid att procent är ett proportionellt multiplikativt samband som relaterar till helheten 100.

För att illustrera progressionen mellan 4–6 och 7–9 beskriver vi också motsvarande text för 7–9

Proportionella samband och resonemang (7–9)

Eleverna ska behärska att särskilja additiva situationer från multiplikativa situationer. Eleverna ska behärska skalning av multiplikativa situationer med reella operatorer inom och mellan enheter för proportioner definierade som likheter mellan två förhållanden, $ab = cd$.

Eleverna ska behärska hur räkneregler för bråk kan användas för att hantera proportionella samband, samt att motsvarande metoder fungerar för alla kvotuttryck

Undervisningen ska behandla proportioner definierade som funktioner.

Undervisningen ska behandla linjäritet i sammansatta förhållanden.

Referenser

Halliday, M., & Kirkwood, A. (2014 [1975]). Language as social semiotic. In J. Angermüller, D. Maingueneauand, & R. Wodak (Eds.), *The discourse studies reader* (pp. 264–271). John Benjamins Publishing Company.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the book: What is—or might be—the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational researcher*, *25*(9), 6–14.

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 72–87. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.10.001

Charalambous, C. Y., & Philippou, G. N. (2010). Teachers' concerns and efficacy beliefs about implementing a mathematics curriculum reform: Integrating two lines of inquiry. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(1), 1–21. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9238-5

Davis, E. A., & Krajcik, J. S. (2005). Designing Educative Curriculum Materials to Promote Teacher Learning. *Educational Researcher*, *34*(3), 3–14. https://doi.org/10.3102/0013189X034003003

Davis, E. A., Palincsar, A. S., Arias, A. M., Bismack, A. S., Marulis, L. M., & Iwashyna, S. K. (2014). Designing Educative Curriculum Materials: A Theoretically and Empirically Driven Process. *Harvard Educational Review*, *84*(1), 24-52,134-136.

Davis, E. A., Palincsar, A. S., Smith, P. S., Arias, A. M., & Kademian, S. M. (2017). Educative Curriculum Materials: Uptake, Impact, and Implications for Research and Design. *Educational Researcher*, *46*(6), 293–304. https://doi.org/10.3102/0013189X17727502

Helenius, O., & Ahl, L. M. (2023). *Hur bör man förändra kursplaner i matematik? – Argument från den internationella forskningen* (Näringslivets skolforum, s. 1–30). Svenskt Näringsliv.

Helenius, O., & Ahl, L. M. (2024a). *A framework for analyzing long-term early algebra progression in textbook series.* Manuscript submitted to the 47th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Auckland.

Helenius, O., & Ahl, L. M. (2024b). *Läromedel på villovägar? – en analys av den bristande vetenskapliga grunden för dagens svenska läromedel i matematik.* (Näringslivets skolforum, s. 1–36). Svenskt Näringsliv.

Hemmi, K., Koljonen, T., Hoelgaard, L., Ahl, L., & Ryve, A. (2013). Analyzing mathematics curriculum materials in Sweden and Finland: Developing an analytical tool. *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Antalya, Turkey. Feb 6th-Feb 10th.*

Jahnke, A. (2014). *Insegel till dialog: Skolans matematikutbildning–en studie i fyra praktiker* [PhD Thesis]. Universitetet i Nordland.

Jahnke, A. (2016). *Skolans och förskolans matematik: Kunskapssyn och praktik*. Studentlitteratur.

Johansson, M. (2015). *Perceptions of Mathematics in Preschool: ”-Now we have a way of talking about the mathematics that we can work with”* [Doktorsavhandling]. Luleå.

Jäder, J. (2022). Creative and conceptual challenges in mathematical problem solving. *Nordisk matematikkdidaktikk, NOMAD:[Nordic Studies in Mathematics Education]*, *27*(3), 49–68.

Jäder, J., Lithner, J., & Sidenvall, J. (2020). Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51*(7), 1120–1136.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). TIMSS 2011 International Results in Mathematics. I *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. https://eric.ed.gov/?id=ed544554

Prytz, J. (2023a). *En ny kursplan i matematik – hur den skulle kunna se ut och varför* (s. 1–48). Svenskt Näringsliv. https://www.svensktnaringsliv.se/bilder_och_dokument/rapporter/3n0ivy_en_ny_kursplan_i_matematik__johan_prytz_nov_2023_webpdf_1205140.html/En_ny_kursplan_i_matematik__Johan_Prytz_nov_2023_web.pdf

Prytz, J. (2023b). *Grundskolans kursplaner i matematik – igår, idag och imorgon* (s. 1–30). Svenskt Näringsliv.

Prytz, J., Ahl, L. M., & Jankvist, U. T. (2022). An Innovation’s Path to Mathematics Textbooks: A Retrospective Analysis of the Successful Scaling of the Swedish PUMP Project. *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, *2*(2), 241–288. https://doi.org/10.1163/26670127-bja10005

Regeringskansliet. (2010). *Förskola i utveckling – bakgrund till ändringar i förskolans läroplan* (promemoria U10.027; s. 23). Utbildningsdepartementet.

Skolverket. (2022). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik. Grundskolan* (s. 38). Skolverket.

Tekkumru-Kisa, M., Stein, M. K., & Doyle, W. (2020). Theory and Research on Tasks Revisited: Task as a Context for Students’ Thinking in the Era of Ambitious Reforms in Mathematics and Science. *Educational Researcher*, *49*(8), 606–617. https://doi.org/10.3102/0013189X20932480

Ullsten Granlund, N. (2019). Implementing theories for preschool teaching with play-based pedagogies. I U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Red.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Nummer 15). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME. https://hal.science/hal-02429790/

Utbildningsdepartementet. (2007). *Tydliga mål och kunskapskrav i grundskolan* (Statens offentliga utredningar SOU 2007:28). Utbildningsdepartementet.

Om författarna

Ola Helenius är professor i ämnesdidaktik med inriktning mot matematik vid institutionen för didaktik och pedagogisk profession vid Göteborgs universitet där han arbetar med undervisningsutveckling. Han har bland annat lett utvecklingen av undervisningsmodellen Tänka, resonera och räkna (TRR).

Linda Marie Ahl har doktorerat i matematikämnets didaktik och forskar om implementering av innovationer för undervisningsförbättringar vid Institutionen för pedagogik, didaktik och utbildnings studier, Uppsala universitet. Hon har 20 års erfarenhet av under visning av matematik på grundläggande och gymnasie nivå, bland annat inom Kriminalvårdens vuxenutbildning.

Författare: Ola Helenius och Linda Marie Ahl

Näringslivets skolforum

SWEDISH ENTERPRISE SCHOOL FORUM